ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 16 Απριλίου 2014
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 32.

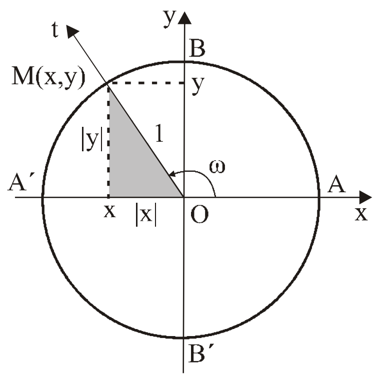
Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Α.2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 60.

Για οποιαδήποτε γωνία *ω* ισχύει η ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$.

Απόδειξη

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της οποιασδήποτε γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι: $ημω = y$ και $συνω = x$



Επειδή όμως,

$(OM) = 1$ και $(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$

θα ισχύει:

$x^2 + y^2 = 1$,

οπότε θα έχουμε:

$συν^2ω + ημ^2ω = 1$.

Α.3. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 174.

Αν $α > 0$ με $α \neq 1$ και $θ > 0$, τότε:

$$α^x = θ \Leftrightarrow \log_α θ = x$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_α θ$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

Α.4. **α)** Σωστή
β) Σωστή
γ) Σωστή
δ) Λάθος
ε) Σωστή

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Πρέπει $P(1)=3\alpha+1$

Άρα $1^3+2\alpha-\alpha^2+2=3\alpha+1 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=-2$.

Β.2.α. Για $\alpha=1$ είναι $P(x)=x^3+2x^2-x+2$. Έχουμε λοιπόν

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-x+2 & x^2+x+1 \\
\hline
-x^3-x^2-x & x+1 \\
\hline
x^2-2x+2 & \\
-x^2-x-1 & \\
\hline
-3x+1 &
\end{array}
$$

Έτσι σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $Q(x)$ το πηλίκο είναι $\pi(x)=x+1$, ενώ το υπόλοιπο $\upsilon(x)=-3x+1$.

Β.2.β. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $Q(x)\neq 0 \Leftrightarrow x^2+x+1\neq 0$, είναι $\Delta=-3$ οπότε το τριώνυμο $Q(x)=x^2+x+1$ δεν έχει ρίζες, δηλαδή ισχύει $x^2+x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μάλιστα $x^2+x+1>0$ αφού είναι ομόσημο του $\alpha=1>0$.

Διαδοχικά έχουμε

$$\frac{P(x)+x-2}{Q(x)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2-x+2+x-2}{x^2+x+1}\geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3+2x^2}{x^2+x+1}\geq 1 \overset{x^2+x+1>0}{\Leftrightarrow} x^3+2x^2\geq x^2+x+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-x-1\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x+1)-(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)\geq 0. \qquad \text{(Σχόλιο 1)}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$-$	0	$-$	0	$+$	

Από τον παραπάνω πίνακα πρόσημου έχουμε ότι η ανίσωση $(x+1)^2(x-1)\geq 0$ επαληθεύεται για $\boxed{x\in[1,+\infty) \text{ ή } x=-1.}$ (Σχόλιο 2)

(1) Σχόλιο:

Συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος οπότε έχουμε $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+x+1}-1\geq 0$.Στη συνέχεια κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και παίρνουμε $\dfrac{x^3+2x^2-\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}\geq 0$. Εδώ όμως παρατηρούμε ότι το $Q(x)=x^2+x+1$ έχει $\Delta=-3<0$ οπότε έχει το ίδιο πρόσημο με το α = 1 > 0, δηλαδή ισχύει $x^2+x+1>0$ οπότε μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών χωρίς να αλλάξουμε τη φορά.

(2) Σχόλιο:

Το ′′=′′ της $(x+1)^2(x-1)\geq 0$ επαληθεύεται για $x=-1$ ή $x=1$ ενώ το ′′>′′ επαληθεύεται για $x\in(1,+\infty)$ έτσι έχουμε $x\in\{-1\}\cup[1,+\infty)$.

Β.2.γ. Πρέπει $Q(x)=x^2+x+1\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μάλιστα $\Pi(x)=x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Η εξίσωση γίνεται:

$x+1=\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow (x+1)^2=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+x+1\Leftrightarrow x=0$

η οποία είναι δεκτή.

Σχόλιο:

Για κάθε $x\geq -1$ και τα δυο μέλη της εξίσωσης $x+1=\sqrt{x^2+x+1}$ είναι μη αρνητικά οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο.

Εναλλακτικά:

$x+1=\sqrt{x^2+x+1}\Rightarrow (x+1)^2=x^2+x+1\Rightarrow x^2+2x+1=x^2+x+1\Rightarrow x=0$

Κάνουμε επαλήθευση. Για $x=0$ η $x+1=\sqrt{x^2+x+1}$ μας δίνει $0+1=\sqrt{0^2+0+1}$ το οποίο ισχύει. Άρα η ρίζα $x=0$ είναι δεκτή.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Επειδή $\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta x\right)=-\sigma\upsilon\nu(\beta x)$ τότε $f(x)=-\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta x)$.

Πρέπει $f(0)=-2$ και $f(\pi)=-1$.

Άρα $-\alpha\sigma\upsilon\nu 0=-2 \Leftrightarrow \alpha=2$ και $-\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta\pi)=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\beta\pi)=\frac{1}{\alpha}$

δηλ. $\sigma\upsilon\nu(\beta\pi)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta\pi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $\beta\pi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$.

Έτσι $\beta=2\kappa+\frac{1}{3}$ ή $\beta=2\kappa-\frac{1}{3}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$.

Έστω $\beta=2\kappa+\frac{1}{3}$, πρέπει $0\le 2\kappa+\frac{1}{3}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le 2\kappa\le\frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{1}{3}$.

Άρα $\kappa=0$, οπότε $\beta=\frac{1}{3}$.

Έστω $\beta=2\kappa-\frac{1}{3}$, πρέπει $0\le 2\kappa-\frac{1}{3}\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le 2\kappa\le\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{2}{3}$ που είναι αδύνατη γιατί $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Έχουμε λοιπόν $\boxed{\alpha=2 \text{ και } \beta=\frac{1}{3}}$.

Άρα $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$.

Γ.2. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$-1\le\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)\le 2 \Leftrightarrow -2\le f(x)\le 2$$

και αφού είναι $f(0)=-2$ και $f(3\pi)=2$ έχουμε

$$f(0)\le f(x)\le f(3\pi) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Έτσι, η f παρουσιάζει

- ελάχιστο για x= 0 το $f(0)=-2$
- μέγιστο για x=3π το $f(3\pi)=2$

<u>Εναλλακτικά:</u>

Επειδή $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$, το ελάχιστο της f είναι το -2 και το μέγιστο το 2.

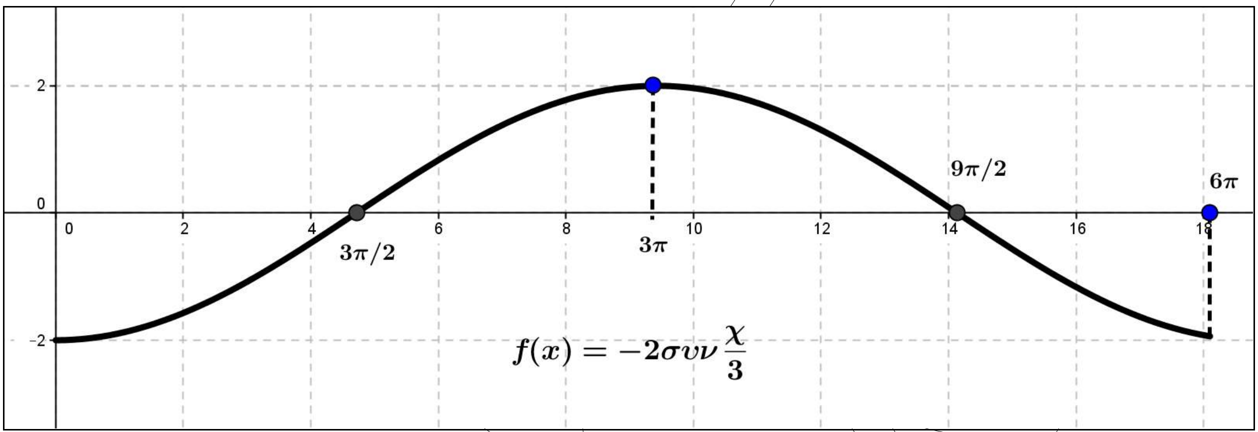
(σχόλιο σελ.81)

Η περίοδος της f είναι $\boxed{T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi}$.

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6\pi]$ είναι ο εξής:

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
$f(x)$	-2	0	2	0	-2

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.



Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3\pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3\pi,6\pi]$.

Γ.3. Είναι

$$f(0)=-2,\ f(-\pi)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1,\ f(2\pi)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1 \text{ και}$$

$$f(2014\pi)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2014\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{671\cdot 3\pi+\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(671\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$-2\sigma\upsilon\nu\left(670\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=1.$$

Έτσι, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}-2\lambda x+y=4\lambda\\ -\lambda x+\lambda y=0\end{cases}.$$

Έχουμε $D=\begin{vmatrix}-2\lambda & 1\\ -\lambda & \lambda\end{vmatrix}=-2\lambda^2+\lambda=-\lambda(2\lambda-1)$.

Πρέπει $D=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=\frac{1}{2}$.

Για $\lambda=0$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases}y=0\\0=0\end{cases}$ που είναι αόριστο.

Για $\lambda=\frac{1}{2}$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases}-x+y=2\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=2\\-x+y=0\end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα το (Σ) για $\lambda=0$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$\boxed{(x,y)=(\kappa,0) \text{ για κάθε } \kappa\in\mathbb{R}.}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Πρέπει $4\cdot 2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2^x \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x \neq 2^{-2} \Leftrightarrow x \neq -2$

και $\frac{4-2^x}{4\cdot 2^x - 1} > 0 \Leftrightarrow (4-2^x)(4\cdot 2^x - 1) > 0$.

Έστω $2^x = \omega$ τότε $(4-\omega)(4\omega - 1) > 0$.

x	-∞		1/4		4		+∞
4 - ω		+		+	0	–	
4ω - 1		–	0	+		+	
Γινόμενο		–	0	+	0	–	

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\frac{1}{4} < \omega < 4$ όμως $2^x = \omega$

Έτσι $2^{-2} < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ (Σχόλιο 1)
(επειδή η 2^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού έχει βάση 2>1)

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\boxed{A = (-2,2)}$.

(1) <u>Σχόλιο:</u>

Από την επίλυση των παραδειγμάτων σελ.167 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι εφαρμόστηκε η πρόταση:

Όταν μια συνάρτηση f είναι <u>**γνησίως αύξουσα**</u> σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για αυτόν το λόγο την εφαρμόσαμε πιο πάνω χωρίς απόδειξη.

Δ.2. Για κάθε $x \in (-2,2)$ τότε και $-x \in (-2,2)$.
Έχουμε

$$f(-x) = \ell n\left(\frac{4-2^{-x}}{4\cdot 2^{-x} - 1}\right) = \ell n\left(\frac{4-\frac{1}{2^x}}{\frac{4}{2^x} - 1}\right) = \ell n\left(\frac{\frac{4\cdot 2^x - 1}{2^x}}{\frac{4-2^x}{2^x}}\right) =$$

$$= \ell n\left(\frac{4\cdot 2^x - 1}{4-2^x}\right) = \ell n\left(\frac{4-2^x}{4\cdot 2^x - 1}\right)^{-1} = -f(x).$$

Δηλαδή η f είναι περιττή συνάρτηση.

Δ.3. Πρέπει $f(x)=h(x)$, όπου $x\in(-2,2)$.

Διαδοχικά έχουμε $\ell n\left(\dfrac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}\right)=x\ell n2-\ell n3$

$\ell n\left(\dfrac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}\right)=\ell n\left(\dfrac{2^x}{3}\right)\Leftrightarrow \dfrac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}=\dfrac{2^x}{3}\Leftrightarrow 4\cdot 2^{2x}-2^x=12-3\cdot 2^x\Leftrightarrow$

$4\cdot(2^x)^2+2\cdot 2^x-12=0\Leftrightarrow 2(2^x)^2+2^x-6=0$.

Έστω $2^x=\omega>0$, τότε $2\omega^2+\omega-6=0$.

Άρα $\omega=-2$ (απορρίπτεται) ή $\omega=\dfrac{3}{2}$ δεκτή αφού $-2<x<2\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<2^x<4$

και προφανώς $\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{2}<4$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν κοινό σημείο.

Είναι $2^x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \ell n2^x=\ell n\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\ell n\frac{3}{2}}{\ell n2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\ell n3-\ell n2}{\ell n2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\ell n3}{\ell n2}-1$

Άρα το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων f και h έχει τετμημένη $x_0=\dfrac{\ell n3}{\ell n2}-1$.

Δ.4. Επειδή $\ell n^2(e^2)=(\ell ne^2)^2=(2\ell ne)^2=4$ η ανίσωση γίνεται:

$-4f(x)>4f(-x)+\ell n^2|x|-\ell nx^2-3$ πρέπει $x\in A=(-2,2)$ και $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

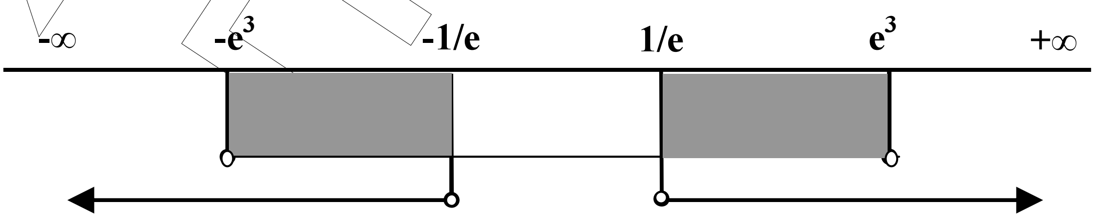
Άρα $\boxed{x\in(-2,0)\cup(0,2)}$.

Όμως η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-x)=-f(x)$ οπότε η παραπάνω ανίσωση γίνεται $\ell n^2|x|-2\ell n|x|-3<0$.

Έστω $\ell n|x|=\omega$ τότε $\omega^2-2\omega-3<0\Leftrightarrow -1<\omega<3$.

Δηλαδή $-1<\ell n|x|<3\Leftrightarrow \ell ne^{-1}<\ell n|x|<\ell ne^3\Leftrightarrow e^{-1}<|x|<e^3\Leftrightarrow \dfrac{1}{e}<|x|$ και $|x|<e^3$

ισοδύναμα $x<-\dfrac{1}{e}$ ή $x>\dfrac{1}{e}$ και $-e^3<x<e^3$



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε λύσεις $x\in(-e^3,-\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},e^3)$.

Επειδή όμως πρέπει $x\in(-2,0)\cup(0,2)$, τότε $\boxed{x\in(-2,-\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},2)}$.