

ΤΑΞΗ: 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

A2.  $\alpha \rightarrow \Sigma, \beta \rightarrow \Lambda, \gamma \rightarrow \Lambda, \delta \rightarrow \Sigma, \epsilon \rightarrow \Sigma.$

A3. α.  $\int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x) \cdot g'(x)dx$

β.  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

γ. Αν διαιρέσουμε την συχνότητα  $v_i$  μιας μεταβλητής  $X$  με το μέγεθος  $n$  του δείγματος προκύπτει η σχετική συχνότητα της τιμής  $x_i$ .

ΘΕΜΑ Β

B1.

Πλήθος λανθασμένων απαντήσεων $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
0	13	13	26	26	0
1	14	27	28	54	14
2	13	40	26	80	26
3	5	45	10	90	15
4	5	50	10	100	20
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>	<b>50</b>		<b>100</b>		<b>75</b>

B2. Η μέση τιμή θα είναι  $\bar{x} = \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 + v_5x_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} = \frac{75}{50} = 1,5.$

**B3.** Αφού έχουμε 50 παρατηρήσεις και είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, τότε μεσαίες παρατηρήσεις είναι η  $25^{\text{η}}$  και η  $26^{\text{η}}$ . Και οι δυο είναι ίσες με 1, οπότε  $\delta = \frac{1+1}{2} = 1$ .

Η επικρατούσα τιμή είναι και αυτή 1, αφού αυτή η τιμή έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

**B4.** Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι τουλάχιστον τρεις λανθασμένες απαντήσεις, δηλαδή 3 ή 4 λανθασμένες απαντήσεις, έδωσαν  $5+5=10$  μαθητές.

**B5.** Από την στήλη αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του πίνακα συχνοτήτων διαπιστώνουμε ότι το πολύ δύο λανθασμένες απαντήσεις έδωσε το 80% των μαθητών.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** 
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} - 7 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} - 7 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} - 7 \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ (\sqrt{x+2}+2) - 7 \right] = \sqrt{2+2}+2-7 =$$

$$= 2+2-7 = -3.$$

**Γ2.** 
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{ax^2}{4} - 2a^2 \right) = \frac{a \cdot 2^2}{4} - 2a^2 = \frac{a}{1} - 2a^2 = a - 2a^2.$$

**Γ3.** Πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -3 = a - 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 3 = 0.$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-3) = 1 + 24 = 25,$$

$$\alpha = \frac{1 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{matrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{matrix}$$

Δεκτή η  $\alpha = -1$  αφού  $\alpha < 0$ .

**Γ4.** Για  $\alpha = -1$  έχω  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} - 7, & x < 2 \\ -\frac{x^2}{4} - 2, & x \geq 2 \end{cases}.$

Άρα

$$\int_2^4 -\frac{f(x)}{x} dx = \int_2^4 \left( \frac{x}{4} + \frac{2}{x} \right) dx = \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \ln x \right]_2^4 = \left( \frac{1}{8} \cdot 4^2 + 2 \ln 4 \right) - \left( \frac{1}{8} \cdot 2^2 + 2 \ln 2 \right) =$$

$$= 2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} - 2 \ln 2 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2.$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1.  $f'(x) = (x^3 - ax^2 + \beta x)' = 3x^2 - 2ax + \beta.$

Αφού είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ακρότατο το 0 αν  $x_1 = 3$  θα είναι  $f'(3) = 0$  και  $f(3) = 0.$

Δ2. Έχω 
$$\left. \begin{matrix} f'(3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 3 \cdot 3^2 - 2\alpha \cdot 3 + \beta = 0 \\ 3^3 - \alpha \cdot 9 + 3\beta = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} -6\alpha + \beta = -27 \\ -9\alpha + 3\beta = -27 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} -6\alpha + \beta = -27 \\ 3\alpha - \beta = 9 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(+)} \left\{ \begin{matrix} -3\alpha = -18 \\ \beta = -27 + 6\alpha \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha = 6 \\ \beta = 9 \end{matrix} \right\}$$

Δ3. Αν  $\alpha = 6$  και  $\beta = 9$  είναι:

i.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$

Αν  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = 3.$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  και η μονοτονία της  $f(x)$  φαίνονται στο πίνακα:

$x$		1		3		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			τ.μ.		τ.ε.	

Άρα  $f \uparrow (-\infty, 1], f \downarrow [1, 3]$  και  $f \uparrow [3, +\infty).$

ii. Έχει τ.μ. το  $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$  και τ.ε. το  $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$

iii. Είναι  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 < 0$  για  $1 < x < 3.$

Άρα  $E = \int_1^3 -f'(x) dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx = \left[ -x^3 + 6x^2 - 9x \right]_1^3 =$   
 $= (-27 + 54 - 27) - (-1 + 6 - 9) = 0 - (-4) = 4$  τ.μ.