

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 217 την απόδειξη του Θεωρήματος.
- A2. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 150 τον ορισμό του μεγίστου.
- A3. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 234 την απόδειξη του τύπου $(a^x)' = a^x \ln a$.
- A4.
 - i. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 152 τα σχόλια.
 - ii. Ψευδής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 90 τις δυνάμεις του i με $v = 3$.
 - iii. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 165 το Θεώρημα 1^ο.
 - iv. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 241 τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.
 - v. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 261 το σχόλιο του Θεωρήματος του Fermat.

ΘΕΜΑ Β

B1. Τα πεδία ορισμού των f, g είναι αντίστοιχα τα $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = (0, +\infty)$

- Η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

Για τέτοιες τιμές του x , έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)-2} = e^{\ln x} = x$$

Ωστε $(f \circ g)(x) = x$ με $x \in (0, +\infty)$

- Η $g \circ f$ ορίζεται στο σύνολο

$$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{x-2} > 0\} = \mathbb{R}$$

Για τέτοιες τιμές του x , έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = \ln f(x) + 2 = \ln e^{x-2} + 2 = (x-2) + 2 = x$$

Ωστε $(g \circ f)(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, επομένως δεν είναι ίσες.

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1 - 2} \neq e^{x_2 - 2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως η f είναι 1-1 και έχει αντίστροφη. Έχουμε

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = e^{x-2} \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \ln y, \quad y > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln y + 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln x + 2, \quad x > 0$

B3 Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^{x-2} - \ln x + 2, \quad x \in [e^{-2}, 2]$.

- Η h είναι συνεχής. Πράγματι η συνάρτηση e^{x-2} είναι συνεχής, ως σύνθεση της πολυωνυμικής $x - 2$ με την εκθετική e^x , οι οποίες είναι συνεχείς. Επομένως η h είναι συνεχής, γιατί προκύπτει από πράξεις των συνεχών συναρτήσεων e^{x-2} , $\ln x$ (λογαριθμική) και 2 (σταθερή).
- Είναι

$$h(e^{-2}) = e^{e^{-2}-2} - \ln e^{-2} - 2 = e^{e^{-2}-2} + 2 - 2 = e^{e^{-2}-2} > 0$$

και

$$h(2) = e^{2-2} - \ln 2 - 2 = -1 - \ln 2 < 0$$

Οπότε:

$$h(e^{-2}) \cdot h(2) = e^{e^{-2}-2} (-1 - \ln 2) < 0$$

Εφαρμόζεται, επομένως το Θεώρημα του Bolzano για την h στο διάστημα $[e^{-2}, 2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ με $h(x_0) = 0$. Τότε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} - \ln x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = \ln x_0 + 2$$

Αυτό σημαίνει, ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ και αποδεικνύει το ζητούμενο.

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = 0$, γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \frac{1}{e^2} \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Ακόμα, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{x}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 2) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε από

το αντίστοιχο θεώρημα του De L' Hospital έχουμε:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E_3.Μλ3ΘΤ(α)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = 0$$

Ωστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i Είναι $1+3\alpha^2 \neq 0$, οπότε:

$$f(x) = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \tag{1}$$

Η συνάρτηση $2tf(t)$ είναι συνεχής ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $2t$ και $f(t)$, οπότε η συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα $\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $-\int_1^x 2tf(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της $-\int_1^x 2tf(t)dt$ με την εκθετική e^x . Το γινόμενο της επί τον αριθμό $\frac{1}{1+3\alpha^2}$,

δηλαδή η $f(x) = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+3\alpha^2} \left(e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \right)' = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \left(-\int_1^x 2tf(t)dt \right)' \\ &= f(x)(-2xf(x)) = -2xf^2(x) \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$, αφού $1+3\alpha^2 > 0$ και $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} > 0$. Έτσι

$$f'(x) = -2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = (x^2)'$$

Επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c \tag{2}$$

Η (1) για $x = 1$ δίνει $f(1) = \frac{1}{1+3\alpha^2}$.

Η (2) δίνει $\frac{1}{f(1)} = 1+c \Leftrightarrow 1+3\alpha^2 = 1+c \Leftrightarrow c = 3\alpha^2$

Άρα η (2) δίνει $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

Ε_3.Μλ3ΘΤ(α)

$$\int_0^\alpha t f(t) dt = \int_0^\alpha \frac{t}{t^2 + 3\alpha^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{(t^2 + 3\alpha^2)'}{t^2 + 3\alpha^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln |t^2 + 3\alpha^2| \right]_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \ln 4\alpha^2 - \frac{1}{2} \ln 3\alpha^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη του α.

Γ3. Η f, ως ρητή, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} \right)' = -\frac{(x^2 + 3\alpha^2)'}{(x^2 + 3\alpha^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 3\alpha^2)^2}$$

Το πρόσημο της f' με την μονοτονία και το ακρότατο της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$\frac{1}{3\alpha^2}$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = \frac{1}{3\alpha^2}$

Για την f'' έχουμε:

$$f''(x) = -2 \left[\frac{x}{(x^2 + 3\alpha^2)^2} \right]' = -2 \frac{(x^2 + 3\alpha^2)^2 - x \cdot 2(x^2 + 3\alpha^2) \cdot 2x}{(x^2 + 3\alpha^2)^4} =$$

$$= -2 \frac{(x^2 + 3\alpha^2)^2 - 4x^2(x^2 + 3\alpha^2)}{(x^2 + 3\alpha^2)^4} = -2 \frac{x^2 + 3\alpha^2 - 4x^2}{(x^2 + 3\alpha^2)^3} = 6 \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + 3\alpha^2)^3}$$

Το πρόσημο της f'' με την κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	$- \alpha $	$ \alpha $	$+\infty$
f''	+	0	0	+
f		$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	

Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -|\alpha|]$, $[|\alpha|, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-|\alpha|, |\alpha|]$. Έχει σημεία καμπής τα $(-|\alpha|, 1/4\alpha^2)$ και $(|\alpha|, 1/4\alpha^2)$

Η f , ως συνεχής στο \mathbb{R} , δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Στα $+\infty$ και $-\infty$ έχουμε:

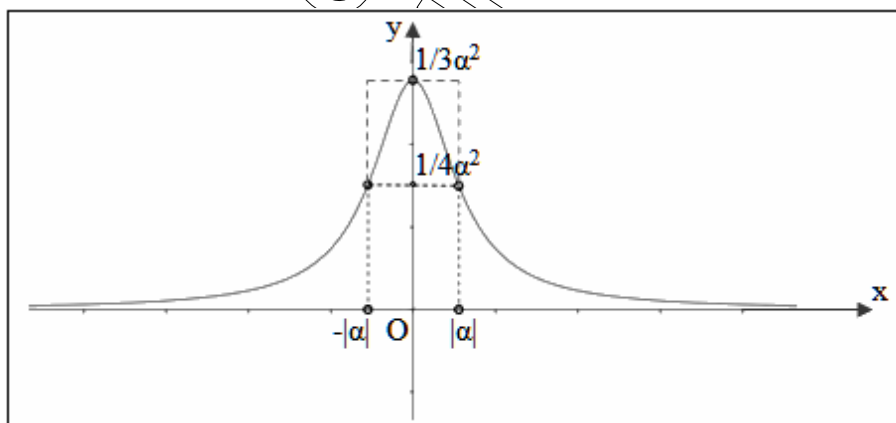
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τον άξονα των x .
Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$
f'	+	+	0	-	-
f''	+	0	-	0	+
f	0	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	$\frac{1}{3\alpha^2}$ max	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	0

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



Παρατήρηση. Η f είναι άρτια αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 3\alpha^2} = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = f(x)$$

Επομένως μπορούμε να την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να επεκτείνουμε τα συμπεράσματα στο \mathbb{R} .

- Γ4.** Το ζητούμενο εμβαδό (βλέπε τη γραφική παράσταση της f) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό $E_1 = |\alpha| \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους

άξονες και τις ευθείες $x = \alpha$, $y = \frac{1}{4\alpha^2}$, και μικρότερο από το εμβαδό

$E_2 = |\alpha| \frac{1}{3\alpha^2} = \frac{1}{3|\alpha|}$ του ορθογώνιου που ορίζεται από τους άξονες και τις

ευθείες $x = \alpha$, $y = \frac{1}{3\alpha^2}$. Επομένως $\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$

Αλλιώς: Με $\alpha > 0$, επειδή $f(x) > 0$ είναι $E = \int_0^\alpha |f(x)| dx = \int_0^\alpha f(x) dx$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \alpha]$, οπότε για $x \in [0, \alpha]$ είναι

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{3\alpha^2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \geq 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \geq 0$$

Επειδή οι αντίστοιχες ισότητες δεν ισχύουν σε όλο το $[0, \alpha]$, έχουμε

$$\int_0^\alpha \left[f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \right] dx > 0 \text{ και } \int_0^\alpha \left[\frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \right] dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha f(x) dx - \left[\frac{x}{4\alpha^2} \right]_0^\alpha > 0 \text{ και } \left[\frac{x}{3\alpha^2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha f(x) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow E - \frac{1}{4\alpha} > 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha} - E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha} < E < \frac{1}{3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Με $\alpha < 0$ θα εργαστούμε ομοίως.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x+2}, x \neq -2$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -1 \tag{1}$$

και

$$f(x) = (x+2)g(x) + 2e^{x+2}, x \neq -2 \tag{2}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(x+2) + 2e^{x+2}] = \lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(x+2)] + \lim_{x \rightarrow -2} 2e^{x+2} = 0 + 2 = 2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

Η f , ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα και στο $x_0 = -2$, έτσι

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(-2) = 2 \tag{3}$$

Έχουμε, με $x \neq -2$

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} \stackrel{(1),(3)}{=} \frac{(x+2)g(x) + 2e^{x+2} - 2}{x+2} = \frac{(x+2)g(x)}{x+2} + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = g(x) + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}$$

Το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(e^{x+2} - 1)'}{(x+2)'} = \lim_{x \rightarrow -2} (e^{x+2})' = e^0 = 1$$

Επομένως, εφαρμόζεται ο αντίστοιχος κανόνας του De L' Hospital σύμφωνα με το οποίο βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(e^{x+2} - 1)'}{(x+2)'} = 1$$

Τότε

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[g(x) + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = 1$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η C_f είναι κοίλη, γιατί $f''(x) < 0$ στο \mathbb{R} . Επομένως τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της στο σημείο της $A(-2, f(-2))$, εκτός του σημείου επαφής που είναι κοινό σημείο. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y - 2 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 4$$

Άρα $f(x) \leq x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται και με τη βοήθεια της συνάρτησης $T(x) = f(x) - x - 4$, η οποία έχει μέγιστο το $T(-2) = 0$.

Δ2. Είναι $f(-2) = f(0) = 2$. Ακόμα η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$, ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[-2, 0]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή $f''(x) < 0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε το x_0 είναι μοναδική της ρίζα και

- για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$ είναι $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$
- για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ είναι $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

Άρα η f ως συνεχής έχει μέγιστο (ολικό) το $f(x_0)$ με $x_0 \in (-2, 0)$.

Δ3. Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , επομένως είναι 1-1, οπότε

$$f' \left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt \right) = f'(0) \Leftrightarrow \int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt = 0 \quad (4)$$

Αρκεί να δείξουμε, ότι η (4) έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} την $x = 5$.

Πράγματι, για $x = 5$ η (4) επαληθεύεται, γιατί γίνεται $\int_0^0 f(t-x)dt = 0$.

Για να δείξουμε την μοναδικότητα της ρίζας θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $t-x = u$, οπότε $dt = du$. Για $t=0$ το $u = -x$ και για $t = 2(x-5)$ το $u = x-10$, επομένως

$$h(x) = \int_{-x}^{x-10} f(u)du = \int_0^{x-10} f(u)du - \int_0^{-x} f(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, επομένως και οι συνθέσεις των $x-10$ και $-x$ με την φ είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^{x-10} f(u)du\right)' = (x-10)'f(x-10) = f(x-10),$$

$$\left(\int_0^{-x} f(u)du\right)' = (-x)'f(-x) = -f(-x)$$

Επομένως η h είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x)$$

Επειδή, από το ερώτημα Δ1 $f(x) \leq x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x) \leq (x-10) + 4 + (-x) + 4 = -2 < 0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως και 1-1, που σημαίνει ότι η ρίζα της είναι μοναδική. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

- Δ4. Στο ερώτημα Δ1 δείξαμε ότι $f'(x) < 0$ στο $(x_0, +\infty)$ με $x_0 \in (-2, 0)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Είναι $|z+i| \geq 0$ και $|z|+1 \geq 1 > 0$, αφού το μέτρο κάθε μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός. Τότε, με $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$f(|z+i|) \leq f(|z|+1) \Leftrightarrow |z+i| \geq |z|+1$$

$$\Leftrightarrow |x+(y+1)i| \geq |x+iy|+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} \geq \sqrt{x^2+y^2}+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1 \geq x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+1$$

$$\Leftrightarrow y \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } y^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } x = 0, \text{ άρα } z = iy, y \in \mathbb{R}^+, \text{ φανταστικός.}$$