



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση $\chi \cdot \chi_1 + \psi \cdot \psi_1 = \rho^2$.

(9 μονάδες)

B.

- a. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

- b. Δώστε τον ορισμό της υπερβολής με εστίες E και E' .

(2.3=6 μονάδες)

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Για δύο οποιαδήποτε διάνυσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ισχύει $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.

2. Η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + C = 0$, με $A, B, C \in \mathbb{R}$ και $A \cdot B > 0$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x' .

3. Η παραβολή $c: y^2 = px$ έχει εστία το σημείο $E\left(\frac{P}{4}, 0\right)$.

4. Αν οι ελλείψεις $c_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{\psi^2}{\beta_1^2} = 1$ και $c_2: \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} = 1$ είναι όμοιες τότε

$$\alpha_1 = \alpha_2 \text{ και } \beta_1 = \beta_2.$$

5. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ABG δίνεται από τον τύπο: $(ABG) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$.

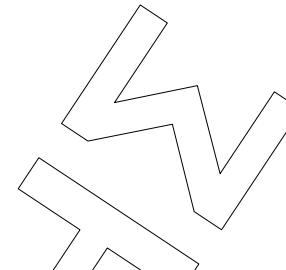
(5x2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε τρίγωνο $ABΓ$ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{AΓ} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ $|\vec{\beta}| = 1$ και $\hat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$

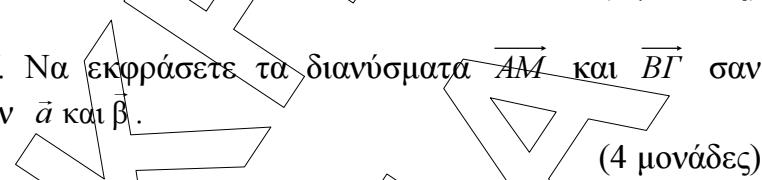
1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

- a.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- β.** $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$
- γ.** $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$



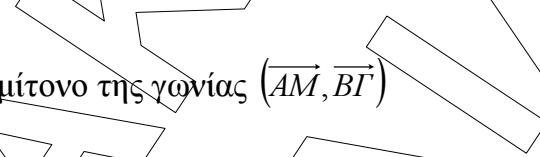
(9 μονάδες)

2. Έστω M μέσο του $BΓ$. Να εκφράσετε τα διανύσματα \overrightarrow{AM} και $\overrightarrow{BΓ}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



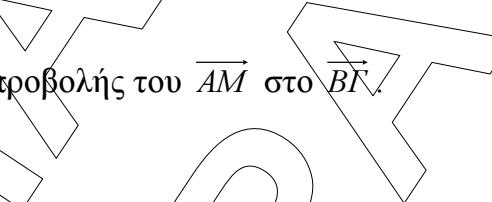
(4 μονάδες)

3. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BΓ})$



(5 μονάδες)

4. Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του \overrightarrow{AM} στο $\overrightarrow{BΓ}$



(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με εξισώσεις διαγωνίων $(BΔ):y=x+1$ και $(AΓ):y=2x-3$. Η διαγώνιος $BΔ$ είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι $d = 2\sqrt{2}$ και οι οποίες διέρχονται από τις κορυφές A και $Γ$ αντιστοίχως. Αν $\overrightarrow{AD} = (4, 6)$, τότε.

- 1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$.
(5 μονάδες)
- 2. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1):x-y-1=0$ και $(\varepsilon_2):x-y+3=0$.
(8 μονάδες)
- 3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών $A, B, Γ, Δ$ του παραλληλογράμμου.
(8 μονάδες)
- 4. Να βρείτε το εμβαδόν $(ABΓΔ)$ του παραλληλογράμμου.
(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 - 2(\eta\mu\theta)x + 4(\sigma\nu\theta)y + \eta\mu^2\theta = 0$, (1) με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση (1) παριστάνει για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα r ως συνάρτηση της γωγίας θ . (6 μονάδες)
2. Τα κέντρα των κύκλων $K(x_0, y_0)$ που προκύπτουν από την (1), ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη του μεγάλου Α'Α και μικρού Β'Β άξονα της, τις εστίες της Ε', Ε καθώς και την εκκεντρότητα της ϵ . (9 μονάδες)
3. Για τις συντεταγμένες των κέντρων $K(x_0, y_0)$ των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ισχύουν: $x_0 > 0, y_0 < 0$ και στην συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $K(x_0, y_0)$. (4 μονάδες)
4. Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση, της εστίας Ε (με θετική συντεταγμένη) από τυχαίο σημείο τού κύκλου ο οποίος προκύπτει από την (1) για $\theta = \frac{\pi}{3}$, είναι $d_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $d_2 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, αντιστοίχως. (6 μονάδες)