Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Σχολικό Βιβλίο Σελίδα 136.
Β) Λάθος, Σωστό, Σωστό, Σωστό, Λάθος.
Γ) Γ, Β, Δ, Γ, Β, Α

ΘΕΜΑ 2ο

α) $P(x) = F(x) \Leftrightarrow x^3 – 5x^2 + 16x – 12 = x^2 + 5x – 6 \Leftrightarrow x^3 – 6x^2 + 11x – 6 = 0$
Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner:

1	–6	11	–6	1
	1	-5	6	
1	–5	6	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$(x–1)(x^2–5x+6)=0 \Leftrightarrow x–1=0 \text{ ή } x^2–5x+6=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

β) Πρέπει και αρκεί $P(x) < 0 \Leftrightarrow x^3–5x^2+16x–12 < 0$
Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

1	–5	16	–12	1
	1	–4	12	
1	–4	12	0	

Η ανίσωση γίνεται $(x–1)(x^2–4x+12) < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Το τριώνυμο $x^2–4x+12$ είναι θετικό για κάθε $x \in R$,αφού $\Delta < 0$.
Τελικά για $x \in (–\infty,1)$ η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον x΄x.

γ) Έχουμε $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$, άρα $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 3.2^{\nu-1}$.

i) $\alpha_\nu = 192 \Leftrightarrow 3.2^{\nu-1} = 192 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 64 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^6 \Leftrightarrow \nu–1 = 6 \Leftrightarrow \nu = 7$, άρα ο όρος είναι ο έβδομος.

ii) Έχουμε: $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$, για κάθε $\nu \in N^*$. Το ζητούμενο γινόμενο ισούται με $\lambda \cdot \dfrac{1}{\lambda} = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$ είναι:

$$f(x) = \frac{\eta\mu 4x + 2\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu 2x(\sigma\upsilon\nu 2x + 1)}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$\frac{2 \cdot 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + 1)}{\sigma\upsilon\nu x} = 8\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x = 8\eta\mu x(1 - \eta\mu^2 x) = 8\eta\mu x - 8\eta\mu^3 x .$$

β) Για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$ είναι:

$$f(x) = 16\eta\mu x \Leftrightarrow 8\eta\mu x - 8\eta\mu^3 x = 16\eta\mu x \Leftrightarrow 8\eta\mu^3 x + 8\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$8\eta\mu x(\eta\mu^2 x + 1) = 0 \overset{\eta\mu^2 x + 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in Z .$$

γ) $f(\frac{\pi}{6}) = 8\eta\mu\frac{\pi}{6} - 8\eta\mu^3\frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{1}{2} - 8(\frac{1}{2})^3 = 4 - 1 = 3$

$f(0) = 8\eta\mu 0 - 8\eta\mu^3 0 = 0$

$f(-\frac{\pi}{6}) = 8\eta\mu(-\frac{\pi}{6}) - 8\eta\mu^3(-\frac{\pi}{6}) = 8(-\frac{1}{2}) - 8(-\frac{1}{2})^3 = -4 + 1 = -3 .$

Έχουμε: $2f(0) = f(\frac{\pi}{6}) + f(-\frac{\pi}{6})$, άρα οι $f(-\frac{\pi}{6})$, $f(0)$, $f(\frac{\pi}{6})$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ 4ο

$f(x) = \ln(x + \alpha - \beta)$, $x > -\alpha + \beta$.

Α. α) $\ln 6 + f(\frac{\pi}{2}) - \ln 5 = \ln\pi \Leftrightarrow \ln 6 + \ln(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta) - \ln 5 = \ln\pi \Leftrightarrow$

$\ln(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta) = \ln 5 + \ln\pi - \ln 6 \Leftrightarrow \ln(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta) = \ln\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}.$

β) $f(x) = \ln(x + \frac{\pi}{3})$, $x > -\frac{\pi}{3}$

$\eta\mu(e^{f(x)})\sigma\upsilon\nu(e^{f(x)}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu(e^{f(x)})\sigma\upsilon\nu(e^{f(x)}) = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu(2e^{f(x)}) = 1$

$\Leftrightarrow \eta\mu(2e^{\ln(x+\frac{\pi}{3})}) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(2(x + \frac{\pi}{3})) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(2x + \frac{2\pi}{3}) = \eta\mu\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in Z .$

Πρέπει: $x > -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \kappa\pi - \frac{\pi}{12} > -\frac{\pi}{3}, \kappa \in Z \Leftrightarrow \kappa > -\frac{1}{4}, \kappa \in Z \Leftrightarrow \kappa = 0,1,2,\dots$

Τελικά $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in \{0,1,2,...\}$

(Η μη χρησιμοποίηση του τελευταίου περιορισμού, προτείνεται να μη θεωρηθεί λάθος.)

Β. α) $f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha-\beta) = 0 \Leftrightarrow 1+\alpha-\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha-\beta = 0$

β) $f(x) = \ln x, x > 0$

Η ανίσωση ορίζεται όταν x > 0.

$16 \cdot 2^{f(x)} < 2^{\ln(2e^4)} \Leftrightarrow 2^4 \cdot 2^{f(x)} < 2^{\ln(2e^4)} \Leftrightarrow 2^{f(x)+4} < 2^{\ln(2e^4)}$

$\Leftrightarrow f(x) + 4 < \ln 2 + \ln e^4 \Leftrightarrow f(x) < \ln 2 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.