ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Ο μαθητής Α έχει μέση βαθμολογία $\bar{x}_A = \frac{16+14+15+18+17}{5} = \frac{80}{5} = 16$, ενώ ο μαθητής Β έχει μέση βαθμολογία $\bar{x}_B = \frac{14+16+17+16+\lambda}{5} = \frac{63+\lambda}{5}$. Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι $\frac{63+\lambda}{5} = 16 \Leftrightarrow 63+\lambda = 80 \Leftrightarrow \lambda = 17$.

β.

$$S_A^2 = \frac{(16-16)^2+(16-14)^2+(16-15)^2+(16-18)^2+(16-17)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+1+4+1}{5} = 2, \text{ και}$$

$$S_B^2 = \frac{(16-14)^2+(16-16)^2+(16-17)^2+(16-16)^2+(16-17)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+1+1}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$$

γ. Οι συντελεστές μεταβλητότητας της βαθμολογίας των δυο μαθητών είναι:

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{2}}{16} \quad \text{και} \quad CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{1,2}}{16}.$$

Προφανώς ο μαθητής Β έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής, άρα η βαθμολογία του είναι πιο ομοιογενής.

δ. i) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Τιμές x_i	Συχνότητες ν_i	$\nu_i \cdot x_i$	Σχετικές Συχνότητες f_i
12	1	12	0,05
13	4	52	0,20
14	2	28	0,10
15	4	60	0,20
16	6	96	0,30
17	2	34	0,10
18	1	18	0,05
Αθροίσματα	ν = 20	300	1,00

ii) Το εύρος της βαθμολογίας όλων των μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας είναι $18-12=6$ και η μέση βαθμολογία είναι:

$$\overline{x}=\frac{12\cdot 1+13\cdot 4+14\cdot 2+15\cdot 4+16\cdot 6+17\cdot 2+18\cdot 1}{20}=\frac{300}{20}=15$$

ΘΕΜΑ 2^o

α. Είναι $f(-1)=1 \Leftrightarrow \dfrac{(-1)^2+\mu(-1)-2}{-1-1}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\mu-2}{-2}=1 \Leftrightarrow -1-\mu=-2 \Leftrightarrow \mu=1$

β. i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\kappa x+\lambda)=\kappa+\lambda$

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(\kappa x+\lambda)=2\kappa+\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2}{2}+\lambda\right)=\dfrac{2^2}{2}+\lambda=2+\lambda$

iii) Πρέπει $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa+\lambda=3\\ 2\kappa+\lambda=2+\lambda\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\kappa+\lambda=3\\ \kappa=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\lambda=3\\ \kappa=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \kappa=1\end{cases}$

γ. Στο διάστημα $(-\infty\,,1)$ είναι:

$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$ οπότε $f'(x)=(x+2)'=1$.

ΘΕΜΑ 3^o

α. Είναι $f'(x)=\left(x^2+1\right)'=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$. Επομένως η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ με ελάχιστη τιμή $f(0)=0^2+1=1$.

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1+x\cdot ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)-1+x\cdot ln(x+1)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x\cdot ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(x+ln(x+1))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+ln(x+1))=0+ln1=0$

γ. Είναι $F(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}^3}{3} + \mathrm{x} + \mathrm{c}$ όπου $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.

Όμως $3 \cdot F(1) = 7 \iff 3\dfrac{1^3}{3} + 3 \cdot 1 + 3 \cdot \mathrm{c} = 7 \iff 3 \cdot \mathrm{c} = 3 \iff \mathrm{c} = 1$.

Επομένως $F(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}^3}{3} + \mathrm{x} + 1$, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

δ. Είναι $g(\mathrm{x}) = f'(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, οπότε

$g'(\mathrm{x}) = \left(2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)' = (2\mathrm{x})' \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{x}})' = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ και

$g''(\mathrm{x}) = \left(2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)' = 2 \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{x}})' + (2\mathrm{x})' \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{x}})' = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.

Επομένως

$$g''(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 4\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} =$$
$$= 2 \cdot \left(2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right) = 2 \cdot g'(\mathrm{x})$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(10) &= -10^3 + 15 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - 300 \\ &= -1.000 + 15 \cdot 100 + 600 \cdot 10 - 300 \\ &= -1.000 + 1.500 + 6.000 - 300 = 6.200 \text{ χιλ.ευρώ.} \end{aligned}$$

β. Η παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$\mathrm{P}'(\mathrm{x}) = (-\mathrm{x}^3 + 15\mathrm{x}^2 + 600\mathrm{x} - 300)' = -3\mathrm{x}^2 + 30\mathrm{x} + 600.$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}'(\mathrm{x}) = 0 &\iff -3\mathrm{x}^2 + 30\mathrm{x} + 600 = 0 \\ &\iff \mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} - 200 = 0 \\ &\iff \mathrm{x} = -10 \text{ (απορρίπτεται) ή } \mathrm{x} = 20 \end{aligned}$$

Επίσης είναι:

$$\mathrm{P}'(\mathrm{x}) > 0 \text{ για } \mathrm{x} < 20 \quad \text{και} \quad \mathrm{P}'(\mathrm{x}) < 0 \text{ για } \mathrm{x} > 20.$$

Επομένως η συνάρτηση $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ παρουσιάζει μέγιστο για $\mathrm{x} = 20$, με μέγιστη τιμή

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(20) &= -20^3 + 15 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - 300 = -8.000 + 6.000 + 12.000 - 300 = \\ &= 9.700 \text{ χιλ.ευρώ.} \end{aligned}$$

γ. Η παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$\mathrm{P}'(\mathrm{x}) = \left(-\mathrm{x}^3 + 15\mathrm{x}^2 + 600\mathrm{x} - 300\right)' = -3\mathrm{x}^2 + 30\mathrm{x} + 600.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους για $\mathrm{x} = 10$ είναι:

$$\mathrm{P}'(10) = -3 \cdot 10^2 + 30 \cdot 10 + 600 = -300 + 300 + 600 = 600.$$

δ. Η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P''(x) = \left(-3x^2 + 30x + 600\right)' = -6x + 30 .$$

και είναι:

$$P''(x) = 0 \iff -6x + 30 = 0 \iff x = 5$$

Επίσης είναι

$$P''(x) > 0 \text{ για } x < 5 \quad \text{και} \quad P''(x) < 0 \text{ για } x > 5 .$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής $P'(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$,

με μέγιστη τιμή $P'(5) = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 600 = -75 + 150 + 600 = 675$.