



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Μονάδες 10

- B. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 5

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν θεωρήσουμε σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου τότε οι συντεταγμένες του μέσου $M(x, y)$ του AB ,

$$\text{είναι } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως

3. Η ευθεία $x = x_0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$

4. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, έχει εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$.

5. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $(2\alpha + 1)x + (\alpha - 1)y + 3 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το σημείο $M(-1, 2)$.

Μονάδες 8

iii) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x + 5y - 3 = 0$. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της ε με τις ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\alpha = 0$ και $\alpha = -1$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AMB είναι 3 τ.μ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + (2\lambda - 3)y^2 + 6(2 - \lambda)x = 16(\lambda - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

i) Αν $\lambda = 1$, να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει παραβολή C_1 της οποίας να βρείτε την διευθετούσα δ και την εστία E .

Μονάδες 6

ii) Αν $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο C_2 , του οποίου να βρείτε το κέντρο O και την ακτίνα R .

Μονάδες 6

iii) Να βρείτε την εξίσωση και την εκκεντρότητα της έλλειψης, που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων, μία εστία της κοινή με την εστία E της παραβολής C_1 και μεγάλο άξονα ίσο με την ακτίνα R του κύκλου C_2 .

Μονάδες 6

iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία P_1 και P_2 των κωνικών τομών C_1 και C_2 , και να αποδείξετε ότι:

$$d(P_1, \delta) - (P_1E) = d(P_2, \delta) - (P_2E).$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τα οποία σχηματίζουν

μεταξύ τους γωνία $\varphi = \frac{\pi}{3}$, και η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad (1)$$

A Να αποδείξετε ότι:

α. $2\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$.

Μονάδες 2

β. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

Μονάδες 8

B. Αν $K(1, 1)$ είναι το κέντρο του παραπάνω κύκλου, να αποδείξετε ότι:

α. $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $\rho = 1$.

Μονάδες 3

β. Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y - 12 = 0$

Μονάδες 5

γ. Η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με το $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 7

Καλή τύχη!