



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Θεωρία από σχολικό βιβλίο στη σελίδα 83
 Β. Θεωρία από σχολικό βιβλίο στη σελίδα 41
 Γ. 1 → Σωστό 2 → Σωστό 3 → Λάθος
 4 → Λάθος 5 → Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

i) Έστω ότι η (1) δεν παριστάνει ευθεία, τότε θα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$,

τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} 2a+1=0 \\ a-1=0 \end{cases}$$

Άτοπο, διότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

ii) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M, επαληθεύουν την (1).

Πράγματι $(2a+1)(-1) + (a-1)^2 + 3 = -2a-1+2a-2+3=0$,

άρα οι ευθείες της μορφής (1), διέρχονται από το M(-1,2).

iii) Για $a = 0$, προκύπτει η ευθεία με εξίσωση $x-y+3 = 0$.

Το σύστημα $\begin{cases} x+5y-3=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ έχει λύση $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$, άρα A(-2,1).

Για $a = -1$, προκύπτει η ευθεία με εξίσωση $-x-2y+3 = 0$.

Το σύστημα $\begin{cases} x+5y-3=0 \\ -x-2y+3=0 \end{cases}$ έχει λύση $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$, άρα B(3,0).

$\vec{AB} = (5, -1)$ και $\vec{AM} = (1, 1)$, άρα

$$(AMB) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AM}, \vec{AB})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

- i) Για $\lambda=1$ η (1) γίνεται: $C_1: y^2 = 6x$, εξίσωση παραβολής με $p=3$, διευθετούσα $\delta: x = -\frac{3}{2}$ και εστία $E(\frac{3}{2}, 0)$.
- ii) Για $\lambda=2$ η (1) γίνεται: $C_2: x^2 + y^2 = 16$, εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R=4$.
- iii) Η έλλειψη έχει τις εστίες της στον άξονα των x , και αφού η μία είναι $E(3/2, 0)$ είναι $\gamma=3/2$. Ακόμη $2a=4$ άρα $a=2$. Επομένως: $b^2=a^2-\gamma^2=7/4$. Άρα η ζητούμενη έλλειψη έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7/4} = 1$$

Η εκκεντρότητα ε είναι: $\varepsilon=\gamma/a=3/4$.

- iv) Λύνουμε το σύστημα των C_1, C_2 . Με απαλοιφή του y προκύπτει η εξίσωση: $x^2+6x-16=0$ η οποία έχει λύσεις $x=2$ & $x=-8$ που απορρίπτεται γιατί η παραβολή έχει $p=3>0$. Επομένως: $y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$. Άρα τα σημεία τομής είναι: $P_1(2, 2\sqrt{3})$ και $P_2(2, -2\sqrt{3})$. Από τον ορισμό της παραβολής $d(P_1, \delta) = (P_1, E)$ και $d(P_2, \delta) = (P_2, E)$ αφού τα P_1, P_2 είναι σημεία της παραβολής. Επομένως ισχύει ότι: $d(P_1, \delta) - (P_1, E) = d(P_2, \delta) - (P_2, E)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Αν $2\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\varphi = 0$, άτοπο αφού $\varphi = \pi/3$.

β. $A = -2|\vec{\alpha}|, B = -|\vec{\beta}|, \Gamma = \vec{\alpha}\vec{\beta}$.

Η (1) παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν $A^2+B^2-4\Gamma > 0$.

Πράγματι: $A^2+B^2-4\Gamma = 4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 > 0$

αφού το $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 0$ δίνει $2\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ και απορρίπτεται.

$$\text{Άρα } \rho = \frac{\sqrt{|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2}}{2} = \frac{1}{2} |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|.$$

Β. α. Είναι $K \left(\vec{\alpha}, \frac{\vec{\beta}}{2} \right) = (1, 1)$, άρα $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$

Επομένως $\rho^2 = \frac{\vec{\alpha}^2 + \frac{\vec{\beta}^2}{4} - 4 \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\beta}}{2} \cdot \cos \phi}{4} = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$

β. $d(K, \varepsilon) = \frac{|3+4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 = \rho$. Άρα ο κύκλος με εξίσωση την (1)

εφάπτεται στην ευθεία: $3x+4y-12=0$.

γ.

Αν $\vec{V} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$, τότε υπάρχει λ , ώστε $\vec{V} = \lambda \vec{\alpha}$, αφού $\vec{V} \parallel \vec{\alpha}$.

Ακόμα:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{V} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Άρα $\vec{V} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{\alpha}$.