



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1°**

**A. 1.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 139.

**2.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 87.

**B.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

**Γ. 1 Σ, 2 Σ, 3 Σ, 4 Σ, 5 Λ**

**ΘΕΜΑ 2°**

**α.** Πρέπει  $x > 0$ , οπότε το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα  $A = (0, +\infty)$

**β.** Είναι

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x} \text{ με } x > 0$$

**γ.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $A = (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ .

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και άρα δεν έχει ακρότατα.

**δ.** Με  $x \neq 1$  είναι

$$\frac{xf'(x) - 3}{x - 1} = \frac{x \left( 2x + \frac{1}{x} \right) - 3}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2(x + 1)$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 4$$

**ΘΕΜΑ 3°**

Το εύρος του δείγματος είναι  $R = 30 - 5 = 25$  και το πλάτος των κλάσεων είναι

$$c \cong \frac{R}{\kappa} = \frac{25}{5} = 5.$$

Έτσι οι κλάσεις είναι:

$$[ 5, 10), [ 10, 15), [ 15, 20), [ 20, 25), [ 25, 30)$$

με κεντρικές τιμές αντίστοιχα:

$$7,5, 12,5, 17,5, 22,5, 27,5$$

Από τα υπόλοιπα δεδομένα προκύπτουν κατά σειρά οι σχέσεις:

$$v_4 = 30 \quad (1), \quad v_2 = 4v_3 \quad (2), \quad f_1\% = 10 \quad (3) \quad \text{και} \quad v_3 + v_4 + v_5 = 40 \quad (4)$$

Ακόμα:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v$$

$$\Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 80$$

$$(4) \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 40 \quad (5)$$

Είναι

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow 10 = \frac{v_1}{80} \cdot 100 \Leftrightarrow v_1 = 8,$$

και η (5) δίνει  $v_2 = 32$ . Από την (2) βρίσκουμε  $v_3 = 8$  και από την (4)  $v_5 = 2$ , έτσι συμπληρώνουμε τη στήλη των  $v_i$ : 8, 32, 8, 30, 2 με σύνολο 80.

Οι σχετικές συχνότητες  $f_i\%$  προσδιορίζονται από τον τύπο  $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  και

είναι κατά σειρά: 10, 40, 10, 37,5, 2,5 με σύνολο 100.

Οι αθροιστικές συχνότητες  $N_i$  προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$N_1 = v_1, \quad N_i = N_{i-1} + v_i, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

και είναι κατά σειρά: 8, 40, 48, 78, 80.

Πάλι, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες είναι:

$$F_1\% = f_1\%, \quad F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

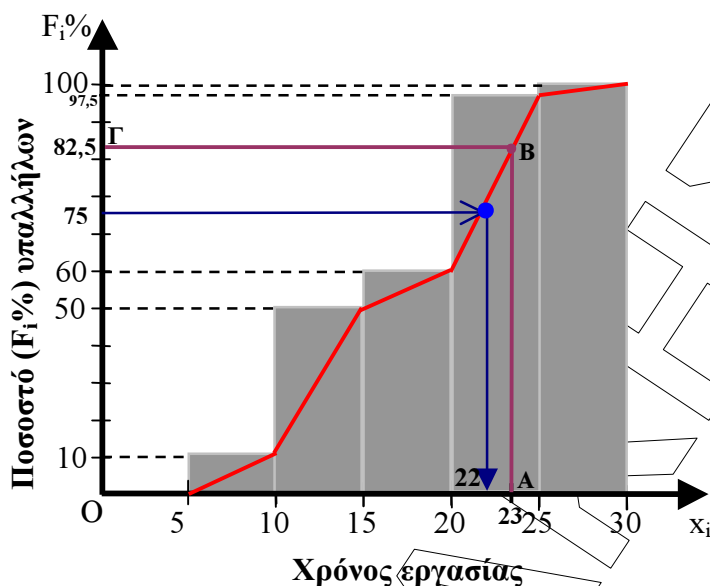
και βρίσκουμε κατά σειρά: 10, 50, 60, 97,5, 100.

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

**Πίνακας συχνοτήτων**

Κλάσεις [ - , - )	Κεντρικές Τιμές $x_i$	Συχνότητες $v_i$	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$	Αθροιστικές συχνότητες $N_i$	Αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$
[5, 10)	7,5	8	10	8	10
[10, 15)	12,5	32	40	40	50
[15, 20)	17,5	8	10	48	60
[20, 25)	22,5	30	37,5	78	97,5
[25, 30)	27,5	2	2,5	80	100
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	—	80	100	—	—

- β. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο φαίνονται στο σχήμα:



- γ. 1<sup>ος</sup> τρόπος. Το ζητούμενο ποσοστό βρίσκεται από το πολύγωνο συχνοτήτων από τη διαδρομή ΑΒΓ. Ξεκινώντας από το σημείο Α(23, 0) πηγαίνουμε κάθετα στον άξονα  $Ox$  μέχρι το αθροιστικό διάγραμμα και μετά παράλληλα στον άξονα  $Ox$  μέχρι το σημείο Γ(0, 82,5). Η τέταγμένη 82,5 του Γ είναι το ζητούμενο ποσοστό.

- 2<sup>ος</sup> τρόπος. Το πλάτος του διαστήματος  $[20, 23)$  είναι τα  $\frac{3}{5}$  του πλάτους της κλάσης  $[20, 25)$ , επομένως το ποσοστό των υπαλλήλων που αντιστοιχεί στο διάστημα  $[20, 23)$  είναι τα  $\frac{3}{5}$  του  $f_4\%$ , δηλαδή,  $\frac{3}{5} \cdot 37,5 = 22,5$ . Έτσι το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + 22,5\% = 82,5\%$$

- δ. 1<sup>ος</sup> τρόπος. Επειδή  $60 = v_1 + v_2 + v_3 + 12$ , οι 60 υπάλληλοι με τα λιγότερα χρόνια εργασίας είναι αυτοί που ανήκουν στις τρεις πρώτες κλάσεις και οι πρώτοι 12 της τέταρτης κλάσης οι οποίοι καλύπτουν διάστημα πλάτους  $\frac{12}{30} \cdot 5 = 2$ . Επομένως τα

ζητούμενα χρόνια είναι  $20+2=22$ .

- 2<sup>ος</sup> τρόπος. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με την παρατήρηση ότι οι 60 υπάλληλοι είναι το 75% του συνόλου, και εργαζόμαστε με το αθροιστικό διάγραμμα (μπλε διαδρομή στο σχήμα), όπως υποδεικνύει το σχολικό βιβλίο στην εφαρμογή της σελίδας 77

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Η ισότητα  $N(A) - N(B) = \frac{1}{5} N(\Omega)$  δίνει  $\frac{N(A)}{N(\Omega)} - \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}$  ή  $P(A) - P(B) = \frac{1}{5}$  ή

$$P(A) = P(B) + \frac{1}{5} \quad (1)$$

Έτσι,  $P(B) < P(A)$ . Επειδή

$$A \cap B \subseteq B \text{ και } A \subseteq A \cup B$$

έχουμε

$$P(A \cap B) \leq P(B) \text{ και } P(A) \leq P(A \cup B)$$

Επομένως

$$P(A \cap B) \leq P(B) < P(A) \leq P(A \cup B) \quad (2)$$

οπότε

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

**α.** Από την (2) είναι:

$$P(A \cap B) < P(A \cup B) \Leftrightarrow 0 < P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0 < R$$

Ακόμα

$$P(A \cup B) \leq 1 \text{ και } P(A \cap B) \geq 0, \text{ οπότε } P(A \cup B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow R \leq 1$$

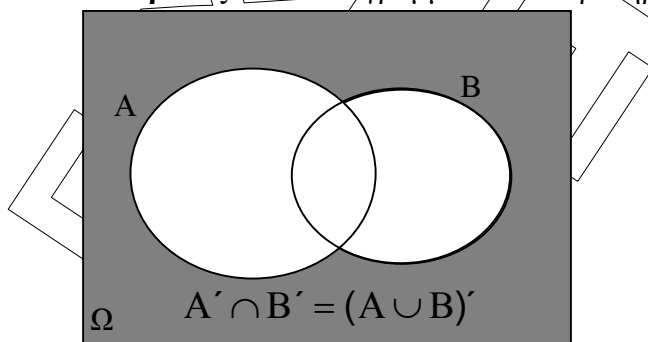
Άρα

$$0 < R \leq 1$$

**β.** Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} R &= P(A \cup B) - P(A \cap B) = [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A - B) + P(B \cap A') \quad [ \text{τύπος: } B - A = B \cap A' ] \\ &= P(A - B) + P(A' \cap B) \\ &= P(A - B) + P(A' \cap (B')) \\ &= P(A - B) + P(A' - B') \end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος.** Από διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι  $A' \cap B' = (A \cup B)'$



Είναι:

$$\begin{aligned} P(A - B) + P(A' - B') &= P(A - B) + P(A') - P(A' \cap B') \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + [1 - P(A)] - [1 - P(A \cup B)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) + 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= R \end{aligned}$$

**Β α.** Η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  ή

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5P(A \cap B) + 3 \quad (4)$$

Με  $x \neq 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x - 1} & \stackrel{(1)}{=} \frac{5 \left[ P(B) + \frac{1}{5} \right] x - 5P(B) - 1}{x - 1} \\ & = \frac{5P(B)x + x - 5P(B) - 1}{x - 1} \\ & = \frac{5P(B)(x - 1) + x - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)[5P(B) + 1]}{x - 1} \\ & = 5P(B) + 1 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [5P(B) + 1] = 5P(B) + 1$$

και η (4) δίνει, τελικά, το ζητούμενο:  $5P(B) + 1 = 5P(A \cap B) + 3$  ή

$$P(B) = P(A \cap B) + \frac{2}{5} \quad (5)$$

**β.** Η (1) λόγω της (5) δίνει:

$$P(A) = P(A \cap B) + \frac{3}{5}$$

Από την (3) προκύπτει:

$$\begin{aligned} R = P(A \cup B) - P(A \cap B) & = [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ & = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ & = P(A \cap B) + \frac{3}{5} + P(A \cap B) + \frac{2}{5} - 2P(A \cap B) \\ & = 1 \end{aligned}$$

**γ.** Αν υποθέσουμε ότι  $P(A \cup B) < 1$ , τότε θα είναι

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) < 1, \text{ άτοπο, από το Ββ,}$$

και επειδή  $P(A \cup B) \leq 1$  απομένει:

$$P(A \cup B) = 1.$$

Τέλος

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.$$