



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

Γ. 1 – (Λάθος) – 2 (Σωστό) – 3 (Λάθος) 4 (Λάθος) διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0$  διότι  $\alpha < \beta$  και

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

5 (Λάθος) διότι: αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

α) Για κάθε  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} =$   
 $= \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x - 2 + 2) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \right] = -\infty$  διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

γ) Για κάθε  $x > 0$ ,  $f''(x) = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Είναι  $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

x	0	$e^2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
F(x)	κυρτή	Σ.Κ	κοίλη

$$f(e^2) = 2e(\ln e^2 - 2) = 0$$

$M(e^2, 0)$  το σημείο καμπής

$$\begin{aligned} \delta) E &= \int_{1/e}^{e^2} \left| \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_{1/e}^1 -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left[ -2\sqrt{x}(\ln x - 2) \right]_{1/e}^1 + \left[ 2\sqrt{x}(\ln x - 2) \right]_1^{e^2} = \\ &= -2(-2) + \frac{2}{\sqrt{e}} \left( \ln \frac{1}{e} - 2 \right) + 2e \cdot (\ln e^2 - 2) - 2(-2) \\ &= 8 + \frac{2}{\sqrt{e}}(-1-2) + 2e(2-2) = 8 - \frac{6}{\sqrt{e}} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

$$\alpha) \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow e^x > x-1 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$$

Έστω  $f(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbf{R}$ . Τότε  $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	+	
f(x)		2	

Η f για  $x=0$  παρουσιάζει ελάχιστο το 2. Άρα  $f(x) \geq f(0) = 2 > 0$  δηλαδή  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \beta) w &= \left[ e^x + (x-1)i \right]^2 + e^x + (x-1)i + 2i = \\ &= e^{2x} + 2i(x-1) \cdot e^x - (x-1)^2 + e^x + (x-1)i + 2i = \\ &= e^{2x} + e^x - (x-1)^2 + i \left[ 2(x-1)e^x + x+1 \right] \end{aligned}$$

Έστω  $g(x) = 2(x-1)e^x + x+1, x \in [0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο  $[0,1]$
- $g(0) = -2+1 = -1$   
 $g(1) = 1+1 = 2$  Άρα  $g(0) \cdot g(1) < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιος ώστε  $g(x_0) = 0$  που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιος ώστε  $0 = W$  να είναι πραγματικός.

γ)  $|z| = \sqrt{e^{2x} + (x-1)^2}$  το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση

$h(x) = e^{2x} + (x-1)^2$  έχει ελάχιστο.

$h'(x) = 2e^{2x} + 2(x-1)$ . Προφανής λύση είναι η  $x=0$  διότι

$h'(0) = 2 - 2 = 0$ . Είναι  $h''(x) = 4e^{2x} + 2 > 0$ . Άρα η  $h'(x) \uparrow$ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$H(x)$	$\swarrow$	min	$\searrow$

Για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $h'(x) < h'(0) = 0$  και για κάθε  $x > 0$

ισχύει  $h'(x) > h'(0) = 0$ . Επομένως η  $h(x)$  έχει ελάχιστο στο  $x=0$ .

Συνεπώς ο μιγαδικός  $z = e^0 + (0-1)i = 1 - i$  έχει το μικρότερο μέτρο.

#### Θέμα 4<sup>ο</sup>

α)  $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) + f'(x) = -\eta\mu x$

$$\left[ e^x \cdot f(x) + f(x) \right]' = (\sigma\upsilon\nu x)'$$

Άρα υπάρχει  $c \in \mathbf{R}$  τέτοιο ώστε:

$$e^x \cdot f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c, x \in \mathbf{R}$$

$$(e^x + 1) \cdot f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c.$$

Για  $x=0$  είναι  $2f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως  $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}, x \in \mathbf{R}$

Έχουμε  $f(x) + f(-x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{-x}} = \dots = \sigma\upsilon\nu x$  (1)

β)  $-\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} \leq \frac{1}{1+e^x}, x \in \mathbf{R}$  διότι  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

γ) Με ολοκλήρωση των μελών της (1) παίρνουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx$$
 (2)

Στο  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) dx$  θέτουμε  $x = -u$  οπότε  $dx = -du$ .

Για  $x = -\pi/2$  είναι  $u = \pi/2$  και για  $x = \pi/2$  είναι  $u = -\pi/2$

$$\text{Άρα } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) du = - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(u) du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u) du.$$

Η (2) γράφεται:

$$I + I = [\eta\mu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Leftrightarrow 2I = \eta\mu\pi/2 - \eta\mu(-\pi/2) = 1 + 1 = 2$$

Επομένως  $I = 1$ .

δ) Βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$$f'(x) = \frac{-\eta\mu x \cdot (1+e^x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\eta\mu x \cdot (1+e^x) + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(1+e^x)^2} < 0$$

για κάθε  $x \in [0, \pi/2]$ . Άρα  $f \downarrow$  στο  $[0, \pi/2]$  οπότε  $f(0) = \frac{1}{2}$  η μέγιστη

τιμή και  $f(\pi/2) = 0$  η ελάχιστη.

Ισχύει  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$  απ' όπου προκύπτει ότι  $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .