ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

Θέματα Άλγεβρας Β΄ Λυκείου
Γενικής Παιδείας
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α.

1. $F_{\max} = 2004, F_{\min} = -2004, T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
2. $\sqrt{\alpha\beta}$
3. $(-2, e^2)$
4. Σωστό

Β. Θεωρία (σχολικό βιβλίο)

Γ. Θεωρία (σχολικό βιβλίο)

Δ. $a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < 1$ άρα η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως έχουμε: $\left(\frac{1}{a}\right)^{\ln x} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\ln y} \Rightarrow \ln x < \ln y$ και, επειδή η συνάρτηση $g(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι $x < y$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. $$\mathrm{A} = \frac{1-\eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2} = \frac{1-\eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1-\eta\mu 2\theta}{1-\eta\mu 2\theta} = 1$$

Β. $$2\eta\mu^3\chi - 4\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^3\chi - 2\eta\mu\chi + 1 - \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi - 2\eta\mu\chi + 1 = 0$$

Θέτω $\eta\mu\chi = \omega$ και έχω την εξίσωση: $2\omega^3 - \omega^2 - 2\omega + 1 = 0$.

Με σχήμα Horner (για ρ=1) έχω $(\omega - 1)\cdot(2\omega^2 + \omega - 1) = 0 \Leftrightarrow \omega = 1, \omega = -1, \omega = \frac{1}{2}$

Άρα $\eta\mu\chi = 1$ ή $\eta\mu\chi = -1$ ή $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ και, επειδή $\chi \in [0, \pi]$, έχουμε τελικά $\chi = \frac{\pi}{2}$ ή $\chi = \frac{\pi}{6}$ ή $\chi = \frac{5\pi}{6}$.

ΖΗΤΗΜΑ 3$^{\text{ο}}$

1. Με σχήμα Horner για το P(x) και για ρ=1, προκύπτει υπόλοιπο (εκ ταυτότητος) 0 και πηλίκο $\Pi(\chi)=\chi^3-\alpha\chi^2+(6-\alpha)\chi-\alpha$. Με νέο σχήμα Horner για το Π(χ) και ρ=1, προκύπτει υπόλοιπο $-3\alpha+\beta+1$, το οποίο πρέπει (αφού το 1 είναι διπλή ρίζα του P(x)) να είναι 0. Άρα έχουμε $-3\alpha+\beta+1=0$ (1). Εξάλλου, από υπόθεση, $P(2)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -7a+2b+8=0$ (2). Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2), βρίσκουμε $a=6, b=17$.
2. Είναι $P(x)=x^4-7x^3+17x^2-17x+6$ και $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ (προκύπτει εύκολα, λύνοντας την P(x)=0). Αφού $2\cdot 2=1+3$ και $(e^2)^2=e^1\cdot e^3$, ισχύει το ζητούμενο.
3. Έστω e, b_1, b_2, b_3, e^2, οι πέντε όροι της γεωμετρικής προόδου. Αν λ ο λόγος της προόδου, θα ισχύει $e^2=e\cdot\lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4=e \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt[4]{e}$. Άρα θα είναι:
$b_1=e\cdot\sqrt[4]{e}=e^{\frac{5}{4}}, b_2=e\cdot(\sqrt[4]{e})^2=e\cdot\sqrt{e}=e^{\frac{3}{2}}, b_3=e\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[4]{e}=e^{\frac{7}{4}}$.

ΖΗΤΗΜΑ 4$^{\text{ο}}$

1. Είναι $\log_x y=\dfrac{\log y}{\log x}=\dfrac{\ln y}{\ln x}$ (τύπος αλλαγής λογαριθμικής βάσης) από όπου προκύπτει το ζητούμενο.
2. Η δοσμένη σχέση (και λόγω του 1) γράφεται $(\log_x y-2)^2=0$, άρα είναι $\log_x y=2 \Leftrightarrow y=x^2$, η ζητούμενη σχέση.
3. Έχουμε $e^{2y^2-3y+1}=(2004)^0 \Leftrightarrow 2y^2-3y+1=0 \Leftrightarrow y=1, y=\dfrac{1}{2}$. Η λύση $y=1$ απορρίπτεται, αφού, αν $y=1$, θα είναι $x=\pm1$, αδύνατο. Άρα $y=\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (η αρνητική τιμή απορρίπτεται).
4. Από υπόθεση έχουμε
$(\ln x-2)^2\le 1 \Leftrightarrow |\ln x-2|\le 1 \Leftrightarrow -1\le \ln x-2\le 1 \Leftrightarrow 1\le \ln x\le 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e\le x\le e^3 \Leftrightarrow e^2\le x^2\le e^6$
και προκύπτει το ζητούμενο.