

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. α) Λάθος διότι η f είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

β) Σωστό διότι $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ άρα $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Σωστό διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta} > 0 \text{ διότι } f \uparrow \text{ άρα } f(a) < f(\beta)$$

δ) Λάθος διότι $f''(x) \geq 0, x \in \Delta$. (Παράδειγμα: για την $f(x) = x^4$ είναι:

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

ε) Σωστό διότι αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ (άτοπο)

στ) Σωστό διότι αν η f δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Όμως η f δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0 \text{ άτοπο.}$$

Θέμα 2ο

Α. $A = (0, +\infty)$ πεδίο ορισμού

$$f'(x) = \frac{(\ln(ax))' \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{ax} \cdot (ax)' \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln(ax)}{2x\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(1) = \frac{2 - \ln a}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \ln a = 2 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

B. α) Για $\alpha=1$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0 \text{ και } f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		\nearrow	\searrow

max

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e} (\text{max})$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \right] = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Άρα $f((0, e^2]) = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$ και $f([e^2, +\infty)) = \left[\frac{2}{e}, 0\right)$

Η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) $\ln(\sqrt{\kappa})^{\sqrt{\kappa+1}} > \ln(\sqrt{\kappa+1})^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\kappa+1} \cdot \ln \sqrt{\kappa} > \sqrt{\kappa} \cdot \ln \sqrt{\kappa+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\kappa+1} \cdot \ln \kappa > \sqrt{\kappa} \cdot \ln(\kappa+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \kappa}{\sqrt{\kappa}} > \frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}} \Leftrightarrow$$

$f(\kappa) > f(\kappa+1)$ ισχύει διότι

$\kappa+1 > \kappa \geq 8 > e^2$ και $f \downarrow$ στο $[e^2, +\infty)$

Θέμα 3ο

$$\begin{aligned} \text{A. } \alpha) \quad z_1 &= \frac{1 + \beta - i(a - \beta i)}{1 + f(\beta) - i[f(a) - i \cdot f(\beta)]} = \frac{1 - i \cdot a}{1 - i \cdot f(a)} = \\ &= \frac{(1 - i \cdot a)(1 + i \cdot f(a))}{[1 - i \cdot f(a)] \cdot [1 + i \cdot f(a)]} = \frac{(1 + a \cdot f(a)) + i(-a + f(a))}{1 + f^2(a)} \end{aligned}$$

$$z_1 \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν } -a + f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a$$

β) Ισχύει $z = -iw \Leftrightarrow a + \beta i = -i(f(a) + i \cdot f(\beta)) \Leftrightarrow a + \beta i = f(\beta) - if(a)$ οπότε $f(a) = -\beta$ και $f(\beta) = a$. Άρα $w = -\beta + \alpha \cdot i$. Έστω $A(a, \beta)$ και $B(-\beta, a)$. Είναι $(OA) = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, $(OB) = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ δηλαδή $\triangle OAB$ ισοσκελές.

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } (AB)^2 &= (a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = \\ &= a^2 + \beta^2 + 2a\beta + a^2 + \beta^2 - 2a\beta = 2(a^2 + \beta^2) = (OA)^2 + (OB)^2 \end{aligned}$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

$$\text{B. } \alpha) \text{ Έχουμε } |a + \beta i - i(f(a) + if(\beta))|^2 = |a + \beta i|^2 + |if(a) - f(\beta)|^2$$

$$|a + f(\beta) + i(\beta - f(a))|^2 = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$(a + f(\beta))^2 + (\beta - f(a))^2 = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + f^2(\beta) + 2a \cdot f(\beta) + \beta^2 + f^2(a) - 2\beta \cdot f(a) = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$2a \cdot f(\beta) - 2\beta \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) = 0$$

β) Έστω $A(a, \beta)$ και $B(f(a), f(\beta))$

$$\lambda_{OA} = \frac{\beta}{a} \text{ και } \lambda_{OB} = \frac{f(\beta)}{f(a)} \text{ οι συντελεστές διεύθυνσης } OA \text{ και } OB \text{ αντίστοιχα}$$

Λόγω της (1) είναι $\lambda_{OA} = \lambda_{OB}$ που σημαίνει A, O, B συνευθειακά.

(Είναι $f(a) \neq 0$ διότι αν $f(a) = 0$ τότε και $f(\beta) = 0$ άτοπο)

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η οποία διέρχεται από το $(0, 0)$ όταν $-f(x_0) = -x_0 \cdot f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) η εξίσωση

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0.$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [a, \beta]$$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και
- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta)$ λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β) η εξίσωση $g'(x) = 0$ δηλαδή η ισοδύναμη της $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$

Θέμα 4ο

$$\alpha) \int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt = -2 \int_0^x t f'(t) dt - 4x \cdot f(x) \cdot \int_0^1 t dt$$

$$\int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt = -2 \int_0^x t \cdot f'(t) dt - 4x \cdot f(x) \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt = -2 \int_0^x t \cdot f'(t) dt - \frac{4}{2} x \cdot f(x) \cdot (1)$$

Με παραγωγή των μελών της (1) έχουμε:

$$(x^2 + 1) f''(x) = -2x \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x)$$

$$(x^2 + 1) f''(x) + 2x \cdot f'(x) = -2f(x) - 2x \cdot f'(x)$$

$$\left[(x^2 + 1) f'(x) \right]' = \left[-2x \cdot f'(x) \right]', \text{ άρα } (x^2 + 1) f'(x) = -2x \cdot f(x) + C_1 \quad (2)$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = C_1$ άρα $C_1 = 2$

Η (2) γράφεται:

$$(x^2 + 1) f'(x) + 2x \cdot f(x) = 2$$

$$\left[(x^2 + 1) f(x) \right]' = (2x)' \text{ Άρα } (x^2 + 1) \cdot f(x) = 2x + C_2$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = C_2$ άρα $C_2 = 0$. Επομένως $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

β' μέθοδος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\left[(t^2 + 1) f'(t) \right]_0^x - \int_0^x 2t f'(t) dt = -2 \int_0^x t f'(t) dt - 4x f(x) \int_0^1 t dt \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) - f'(0) = -4x \cdot f(x) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) - 2 = -2x \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) + 2x \cdot f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left[(x^2 + 1)f(x) \right]' = (2x)'$$

$$\text{Άρα } (x^2 + 1)f(x) = 2x + c$$

Για $x=0$ είναι $f(0) = c$ δηλαδή $c=0$ οπότε $(x^2 + 1)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$\beta) E(a) = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int_0^a (\ln(x^2 + 1))' dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^a = \ln(a^2 + 1).$$

Το a είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'(a) = \left[\ln(a^2(t) + 1) \right]' = \frac{1}{a^2(t) + 1} (a^2(t) + 1)' = \frac{2a(t) \cdot a'(t)}{a^2(t) + 1}.$$

$$\text{Είναι } a'(t) = \frac{10}{3} \text{ cm/sec και } a(t) = 3 \text{ cm, άρα } E'(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{10}{3}}{9 + 1} \text{ cm}^2/\text{sec} = 2 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(a)$ όταν $a = 3 \text{ cm}$.

γ) i) Αφού $x \rightarrow +\infty$ για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$-|f(x)| \leq g(x) + x - 2 \leq |f(x)|$$

$$-\frac{2x}{x^2 + 1} \leq g(x) - (-x + 2) \leq \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 2)] = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

$$\text{ii) Είναι } E = \int_0^2 |g(x) - (-x + 2)| dx = \int_0^2 |g(x) + x - 2| dx \text{ και}$$

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \text{ (ερώτημα i)}$$

$$|g(x) + x - 2| - |f(x)| \leq 0. \text{ Άρα}$$

$$\int_0^2 [|g(x) + x - 2| - |f(x)|] dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 |g(x) + x - 2| dx - \int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \ln 5 \leq 0 \Leftrightarrow E \leq \ln 5$$