ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να προσδιορισθεί διάνυσμα $\vec{x}$ αν είναι $\vec{x} // (\vec{\alpha}+\vec{\beta})$, $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha}+\vec{x})$, $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Β. Δίνεται η εξίσωση $2x - y - 1 + \mu \cdot (x - 3y + 2) = 0$, $\mu \in R$ (1)

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in R$

ii) Να βρείτε το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες που ορίζει η εξίσωση (1)

Γ.

i) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \mu$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ τότε $\mu^2 = R^2(1+\lambda^2)$.

ii) Δείξτε ότι αν από το $A(-1, 3)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ τότε αυτές τέμνονται κάθετα.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω η εξίσωση $x^2 + 4\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot x + y^2 + 4\eta\mu\varphi \cdot y = \kappa^2 - 4$ $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\kappa \neq 0$

i) Δείξτε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων

Β. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x - 4y = 6$

i) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) περνά από την εστία της παραβολής

ii) Να βρείτε κοινά σημεία της (ε) και της παραβολής (C)

iii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής στα σημεία αυτά (ερώτημα ii) και να δείξετε ότι είναι κάθετες

iv) Να δείξετε ότι το κοινό σημείο των εφαπτόμενων αυτών βρίσκεται στην διευθετούσα της παραβολής

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Δίνεται ο κύκλος (C): $x^2 + \psi^2 = 9$ και ένα σημείο του $A(\kappa, \lambda)$

Να δείξετε ότι το σημείο $B\left(\frac{\kappa+4}{2}, \frac{\lambda-6}{2}\right)$ κινείται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παραπάνω κύκλου.

Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(2\sigma\upsilon\nu\theta + 3, 2\eta\mu\theta - 5)$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$.

Γ. Δίνονται τα σημεία $A(-2,1)$, $B(4,-1)$, $M(x,\psi)$ που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε $\widehat{AMB} = 90^0$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Είναι $\vec{x}\,//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ άρα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{x}=\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

Επίσης

$\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{x})=0\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{x}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\vec{\beta}\cdot\left[\lambda\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\right]=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}\lambda=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda=-\frac{1}{3}$

Άρα $\vec{x}=-\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

Β. i) Είναι

$2x-y-1+\mu\cdot(x-3y+2)=0\Leftrightarrow 2x-y-1+\mu x-3\mu y+2\mu=0\Leftrightarrow(2+\mu)x-(1+3\mu)y+2\mu-1=0$

Για να παριστάνει ευθεία αρκεί $2+\mu\neq 0$ ή $1+3\mu\neq 0$

Έστω $\left.\begin{array}{c}2+\mu=0\\ \text{και}\\ 1+3\mu=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\mu=-2\\ \text{και}\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ άρα δεν υπάρχει $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε να μηδενίζει συγχρόνως τις εξισώσεις $2+\mu=0, 1+3\mu=0$ άρα φανερώνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$

ii) Επειδή η εξίσωση $(2x-y-1)+\mu(x-3y+2)=0$ ισχύει για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ άρα θα είναι

$$\begin{cases}2x-y-1=0\\ \text{και }x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\ x-3(2x-1)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\ -5x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$$

Άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το σταθερό σημείο $P(1,1)$

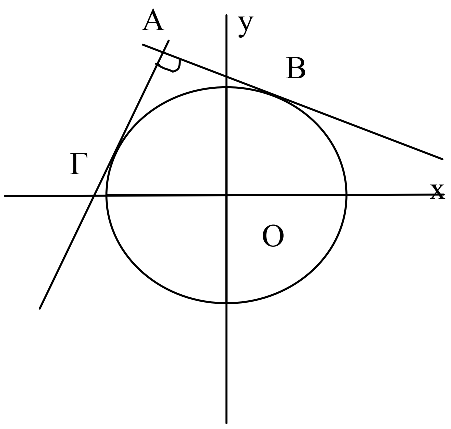
Γ. i) $(\varepsilon): y=\lambda x+\mu\Leftrightarrow\lambda x-y+\mu=0\ (\varepsilon)$

Εφόσον η (ε) εφάπτεται του $(c): x^2+y^2=R^2$ τότε

$$d(0,(\varepsilon))=R\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot 0-0+\mu|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=R\Leftrightarrow\frac{|\mu|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=R\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\mu|=R\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow|\mu|^2=R^2\sqrt{\lambda^2+1}^2\Leftrightarrow\mu^2=R^2\left(\lambda^2+1\right)$$

ii)



Κάθε ευθεία που περνάει από το Α έχει μορφή $y-3=\lambda(x+1) \Leftrightarrow y=\lambda x+\lambda+3 \quad (\varepsilon)$

Εφόσον η (ε) εφάπτεται του $x^2+y^2=5$ τότε σύμφωνα με το (α) ερώτημα θα έχουμε την σχέση : $(\lambda+3)^2=5(\lambda^2+1)$ όπου $R=\sqrt{5} \Leftrightarrow \lambda^2+6\lambda+9=5\lambda^2+5 \Leftrightarrow 5\lambda^2+5-6\lambda-9-\lambda^2=0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2-6\lambda-4=0 \quad (1)$

Αν λ_1, λ_2 οι ρίζες της (1) τότε $\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{-4}{4}=-1 \quad (2)$

Είναι όμως λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων που άγονται από το Α προς τον κύκλο, τότε από την (2) συμπεραίνουμε ότι αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

i) Η εξίσωση γράφεται $\begin{array}{l} x^2+y^2+4\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot x+4\eta\mu\varphi\cdot y-\kappa^2+4=0 \\ \alpha=4\sigma\upsilon\nu\varphi,\ \ \beta=4\eta\mu\varphi,\ \ \gamma=-\kappa^2+4 \end{array}$

Λαμβάνω την συνθήκη

$\alpha^2+\beta^2-4\gamma=16\sigma\upsilon\nu^2\varphi+16\eta\mu^2\varphi-4(-\kappa^2+4)=16(\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi)+4\kappa^2-16=16+4\kappa^2-16=4\kappa^2>0$

άρα φανερώνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)=K(-2\sigma\upsilon\nu\varphi,-2\eta\mu\varphi)$ και ακτίνα

$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{4\kappa^2}=|\kappa|$

ii) Τα κέντρα των κύκλων αυτών είναι $K(-2\sigma\upsilon\nu\varphi,\ -2\eta\mu\varphi)$ $\varphi\in[0,2\pi)$ άρα

$$\begin{array}{l} x=-2\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow x^2=4\sigma\upsilon\nu^2\varphi \\ y=-2\eta\mu\varphi \Rightarrow y^2=4\eta\mu^2\varphi \end{array} \text{ οπότε } x^2+y^2=4$$

Άρα ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Λ(0,0) και ακτίνα R = 2

Β.

i) Είναι $y^2=8x$ άρα $P=4$ οπότε εστία $E(2,0)$ και διευθετούσα: $x=-\frac{P}{2}=-2$

Παρατηρώ ότι για $x=2$ και $y=0$ η εξίσωση $3x-4y=6$ γράφεται $3\cdot2-4\cdot0=6 \Leftrightarrow 6=6$ ισχύει άρα η ευθεία $(\varepsilon): 3x-4y=6$ διέρχεται από την εστία της παραβολής

ii) Λύνω το σύστημα

$$\begin{cases} y^2=8x \\ 3x-4y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=8\cdot\dfrac{6+4y}{3} \\ x=\dfrac{6+4y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2-32y-48=0 \\ x=\dfrac{6+4y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-\dfrac{4}{3} \text{ ή } y_2=12 \\ x_1=\dfrac{2}{9} \text{ ή } x_2=18 \end{cases}$$

Άρα κοινά σημεία $\left(\frac{2}{9},-\frac{4}{3}\right),(18,12)$

iii) Οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά είναι

$(\varepsilon_1): y_1 y = p(x+x_1) \Rightarrow -\frac{4}{3}y = 4\left(x+\frac{2}{9}\right) \Leftrightarrow -\frac{y}{3} = x+\frac{2}{9} \Leftrightarrow -y = 3x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{y=-3x-\frac{2}{3}}$

$(\varepsilon_2): yy_2 = p(x+x_2) \Leftrightarrow 12y = 4(x+18) \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}x+6}$

Παρατηρώ ότι $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2} = -3\cdot\frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

iv) Βρίσκω το σημείο τομής των 2 εφαπτόμενων

$$\begin{cases} y=-3x-\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3}x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{16}{3} \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι το σημείο τομής βρίσκεται πάνω στη διευθετούσα $x=-2$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

A. Το σημείο $A(\kappa,\lambda)\in(C) \Rightarrow \kappa^2+\lambda^2=9$ Επίσης για το σημείο $B\left(\frac{\kappa+4}{2},\frac{\lambda-6}{2}\right)$ θέτουμε

$$\begin{cases} x=\frac{\kappa+4}{2} \\ \psi=\frac{\lambda-6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=2x-4 \\ \lambda=2\psi+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2=4x^2-16x+16 \\ \lambda^2=4\psi^2+24\psi+36 \end{cases} \xRightarrow{\kappa^2+\lambda^2=9} 4x^2+4\psi^2-16x+24\psi+52=9$$

$\Leftrightarrow x^2+\psi^2-4x+6\psi+\frac{43}{4}=0$ Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο διότι :

$A^2+B^2-4\Gamma = (-4)^2+6^2-4\frac{43}{4} = 16+36+-43 = 9>0$

Επομένως $A^2+B^2-4\Gamma>0$ και ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Άρα $K(2,-3)$, $\rho=\frac{3}{2}$

B. Για το σημείο $M(2\sigma\upsilon\nu\theta+3, 2\eta\mu\theta-5)$ όπου $\theta\in\mathbb{R}$ θέτουμε :

$$\begin{cases} x = 2\sigma\upsilon\nu\theta + 3 \\ \psi = 2\eta\mu\theta - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \sigma\upsilon\nu\theta \\ \dfrac{\psi+5}{2} = \eta\mu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\theta = \left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2 \\ \eta\mu^2\theta = \left(\dfrac{\psi+5}{2}\right)^2 \end{cases} \xrightarrow{\eta\mu^\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1} \left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\psi+5}{2}\right)^2 = 1$$

$x^2+\psi^2-6x+10\psi+30=0$ Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο διότι :

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(-6)^2+10^2-4\cdot 30=136-120=16>0$

Άρα $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ και ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\mathrm{A}}{2},-\dfrac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$

Άρα $\mathrm{K}(3,-5)$, $\rho=2$

Επομένως ο γ.τ των σημείων Μ είναι κύκλος κέντρου $\mathrm{K}(3,-5)$ και ακτίνας $\rho=2$

Γ. Επειδή για τα σημεία $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(4,-1)$, $\mathrm{M}(x,\psi)$ ισχύει $\widehat{\mathrm{AMB}}=90^0$ το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο. Επομένως $\mathrm{AM}\perp\mathrm{BM} \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{AM}}\cdot\lambda_{\mathrm{BM}}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{\psi-1}{x+2}\cdot\dfrac{\psi+1}{x-4}=-1$

$\psi^2-1=(x+2)(4-x) \Leftrightarrow x^2+\psi^2-2x-8=0$ Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο διότι :

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(-2)^2-4(-8)=4+32=36>0$

Άρα $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ και ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{\mathrm{A}}{2},-\dfrac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$

Άρα $\mathrm{K}\left(-\dfrac{-2}{2},-\dfrac{0}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}(1,0)$ και $\rho=\dfrac{\sqrt{36}}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

Άρα ο γ.τ των σημείων Μ είναι κύκλος κέντρου $\mathrm{K}(1,0)$ και ακτίνας $\rho=3$

2^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1°

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ και

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \Re$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$.

γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

α)

i. Λάθος

ii. Σωστό

iii. Σωστό

iv. Σωστό

v. Λάθος

β) Πρόταση σελίδα 60, 61.

ΘΕΜΑ 2°

α) Είναι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 4\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -10$

β) Είναι: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \Rightarrow (\vec{\gamma})^2 = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = 13$

ΘΕΜΑ 3°

α) $(\mathrm{AB}) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$

β) $(\mathrm{AB}) = d(A,\varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10$, επομένως $\alpha = 4$ ή $\alpha = -16$.

γ) Για α=4 η ευθεία είναι η ε: 3x+y+4=0 και σημείο τομής της με τον y΄y το Γ(0,-4).

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3,-1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (-1,-7)$, επομένως: $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right| = 10$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι: $A^2+B^2-4\Gamma=\lambda^2+\lambda^2-4(\lambda-1)=2\lambda^2-4\lambda+4=2(\lambda^2-2\lambda+2)<0$ καθώς το τριώνυμο έχει Διακρίνουσα Δ=-4<0, επομένως παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\Re$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα συναρτήσει του λ είναι: $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)=\left(-\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}}{2}.$$

Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία πρέπει:

$$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{\left|-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}}{2}\Leftrightarrow|2-\lambda|^2=\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}^{\,2}\Leftrightarrow\lambda=1.$$

γ) Για λ=1 το κέντρο του κύκλου είναι : $\mathrm{K}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και η ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ενώ η ευθείες που διέρχονται από το σημείο Μ είναι :

$$y=\alpha x+\beta\Rightarrow-\frac{3}{2}=\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{3\alpha-1}{2}$$

επομένως της μορφής $\varepsilon:2\alpha x-2y+3a-1=0$.

Επειδή η ευθεία εφάπτεται στο κύκλο είναι:

$$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|-\alpha+1+3\alpha-1|}{\sqrt{4\alpha^2+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|\alpha|^2}{\sqrt{\alpha^2+1}^{\,2}}=\frac{1^2}{\sqrt{2}^{\,2}}\Leftrightarrow\alpha=\pm1.$$

Για $\alpha=1$, η ευθεία είναι: $x-y+1=0$.

Για $\alpha=-1$, η ευθεία είναι: $x+y+2=0$.

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1°

Α.

i) Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0\left(A\neq 0 \text{ ή } B\neq 0\right)$ (1) και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

ii) Στην ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\delta}$ που είναι παράλληλο σ' αυτήν καθώς και το διάνυσμα $\vec{\eta}$ που είναι κάθετο σ' αυτήν.

Β.

i) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 2x-(\lambda-1)y-3=0$ και το διάνυσμα $\vec{\delta}=(5,3)$.

α) αν $\vec{\delta}//\varepsilon$ τότε : 1. $\lambda=\frac{13}{3}$ 2. $\lambda=-\frac{7}{3}$ 3. $\lambda=1$ 4. τίποτε από τα προηγούμενα

β) αν $\vec{\delta}\perp\varepsilon$ τότε : 1. $\lambda=\frac{1}{3}$ 2. $\lambda=5$ 3. $\lambda=\frac{13}{3}$ 4. τίποτε από τα προηγούμενα

ii) Για την ευθεία $\varepsilon:(\lambda-1)x+(3-\lambda)y-(\lambda-2)=0$ ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης, είναι τότε:

1. $\lambda=3$ 2. $\lambda\neq 1$ 3. $\lambda=2$ 4. $\lambda\neq 3$ 5. $\lambda\neq 2$

iii) **Η εξίσωση** $\left(\alpha^2-5\alpha+4\right)x+\left(\alpha^2-1\right)y-2\alpha+3=0$ **δεν παριστάνει ευθεία όταν:**

1. $\alpha=4$ 2. $\alpha=-1$ 3. $\alpha=1$

ΘΕΜΑ 2°

Α. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-2y^2-3xy+3x+4y-2=0$

i) Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες ε_1, ε_2 κάθετες μεταξύ τους

ii) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών ε_1, ε_2

Β. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\ \lambda x+(\lambda-1)y-1=0$ και $\varepsilon_2:\ 4x+\lambda y+\lambda-2=0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:

i) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

ii) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

ΘΕΜΑ 3°

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-2,2)$, $\vec{v}=(1,2)$, $\vec{w}=(-8,10)$

i) Να βρείτε τα μέτρα τους.

ii) Να υπολογίσετε τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=\vec{u}-2\vec{v}$, $\vec{\beta}=2\vec{u}-\vec{w}$, $\vec{\gamma}=\vec{v}+2\vec{w}$ καθώς και τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

iii) Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε τα διανύσματα $\vec{x_1}=\vec{u}-8\vec{v}$, $\vec{x_2}=\vec{v}+\lambda\vec{w}$ να είναι παράλληλα .

Β. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-6\lambda y-4=0$ (1)

i) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\Re$.

ii) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από δυο σταθερά σημεία.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται ο κύκλος (C): $x^2+\psi^2=25$ Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (C) στο σημείο $A(-4,3)$

β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του (C) που είναι κάθετες στην ευθεία (ζ):$4x-3\psi+2018=0$

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0,\psi_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει την μορφή : $\psi-\psi_0=\lambda(\chi-\chi_0)$

β) Αν (ε) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\chi_A,\psi_A)$ *και* $B(\chi_B,\psi_B)$ τότε :

Τι ονομάζουμε κλίση ή συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας (ε) ; Με τι ισούται ; Ορίζεται πάντα ;

γ) Ποιά είναι η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0,\psi_0)$ και είναι :

i) κατακόρυφη ii) οριζόντια

Ποιός είναι ο συντελεστής διεύθυνσης λ σε κάθε περίπτωση ;

δ) Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

1. Οι ευθείες $\chi=3\psi$ *και* $2\chi=6\psi$ είναι παράλληλες .
2. Η ευθεία $\psi=\chi+\beta$ διέρχεται από το σημείο $(\beta,0)$
3. Η ευθεία $-\psi=-\chi+1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα χ΄χ .
4. Το σημείο $M(\kappa,\kappa+3)$ ανήκει στην ευθεία $\psi=\chi+3$
5. Οι ευθείες $\varepsilon_1:\chi=2$ *και* $\varepsilon_2:\psi=3$ είναι κάθετες .Τότε ισχύει $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1$

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε την ευθεία (ε_1) που τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ στα σημεία $\mathrm{A}(3,0)$ και $\mathrm{B}(0,6)$ αντίστοιχα .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1)

β) Αν (ε_2) είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην (ε_1) τότε να βρείτε :

i) την εξίσωση της ευθείας (ε_2)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) *και* (ε_2)

γ) Ποιά είναι η εξίσωση της διαμέσου που διέρχεται απο την κορυφή Α του τριγώνου ΑΟΒ ;

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(5,4)$ και $\mathrm{B}(-2,3)$

Να βρείτε :

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β .

β) Ένα σημείο Σ του άξονα χ΄χ το οποίο να ισαπέχει από τα Α και Β (ΣΑ=ΣΒ)

γ) Το συμμετρικό Σ΄ του Σ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε) .

δ) Ποια είναι η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ΣΑ και ΣΒ ; Τί σχήμα είναι το τετράπλευρο ΑΣΒΣ΄;

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος (C) , και τα σημεία του $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{B}(2,5)$.Το κέντρο του κύκλου ανήκει στην ευθεία (ε): $3x+5=4\psi$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση του κύκλου (C)

β) τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και ο κύκλος (C) ορίζει πάνω σε αυτές χορδή μήκους $d=6$

γ) το μήκος της χορδής που έχει μέσο το σημείο $\mathrm{M}(-1,3)$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ και $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1, |\overrightarrow{O\Gamma}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

α. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β. Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ .

γ. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι ορθογώνια.

δ. Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}$ είναι οξεία.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{a}+2\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ και $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2|\vec{a}|$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{a}\perp\vec{b}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{b}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}|$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν $\Gamma(4,-1)$ και $(\varepsilon_1): 2x-3\psi+11=0, (\varepsilon_2): 2x+3\psi=0$ είναι οι εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα .

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνονται οι εξισώσεις $(\varepsilon_1): (k^2-1)x-(k^2+2k+1)y+2k+2=0$ και

$(\varepsilon_2): (k-1)x-(k+1)y+2k^2+4=0$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $k\in\mathbb{R}$ ώστε οι (ε_1) και (ε_2) να παριστάνουν ευθείες.

β. Για τις τιμές του $k\in\mathbb{R}$ που βρήκατε:

i. Να δείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.

ii. Να δείξετε ότι η (ε_1) διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρεθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 5
Δίνονται τα σημεία $A(k-1,3), B(k,2)$ και $\Gamma(k+1,-1)$ με $k \in \mathbb{R}$
α. Να δείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}$, τα σημεία Α,Β,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
β. Για $k=-1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε $(MAB)=2(AB\Gamma)$

ΑΣΚΗΣΗ 6
Δίνεται η εξίσωση $6x^2-y^2=xy$. (1)
α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, τις οποίες και να σχεδιάσετε.
β. Να βρείτε την οξεία γωνία θ που σχηματίζουν οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 7
Δίνεται η εξίσωση : $(3a-5)x+(a-3)y-4a+8=0$.
α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού α.
β. Ποιά από τις ευθείες ισαπέχει από τα σημεία $A(4,-3), B(3,2)$;

ΑΣΚΗΣΗ 8
Δίνονται οι εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2\lambda x-(\lambda+1)y-3\lambda+1=0$ $(\varepsilon_2):(3\lambda+1)x+(\lambda-1)y-6\lambda+2=0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$
α. Να αποδείξετε ότι παριστάνουν ευθείες διερχόμενες από σταθερά σημεία.
β. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\eta): y=3x-5$ να περιέχεται σε κάποια από τις παραπάνω οικογένειες ευθειών.
γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

ΑΣΚΗΣΗ 9
Δίνεται ο κύκλος $(c):(x-1)^2+(y+2)^2=4$ και η ευθεία $(\varepsilon):(2\lambda+1)x-(\lambda-1)y+3=0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$
α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (c) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
γ. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ευθεία (ε) ορίζει χορδή στον κύκλο (c) με μήκος $2\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(2+3k)x-(8+4k)y+19k-8=0$ (1) με $k\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $k\in\mathbb{R}$.

β. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων για $k\in\mathbb{R}$;

γ. Να δείξετε ότι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(\eta\mu\theta, 2-\sigma\upsilon\nu\theta)$ με $\theta\in[0,2\pi)$.

α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ κινείται σε κύκλο (c_1) του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ του κύκλου (c_1) ,που άγονται από το $O(0,0)$

γ. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εξισώσεις των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται η παραβολή (c) η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-8,8)$. Να βρείτε:

α. Την εξίσωση της παραβολής (c).

β. Την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής (c).

γ. Σημείο Β της παραβολής (c) διαφορετικό του Α, ώστε τα σημεία Α,Ε,Β να είναι συνευθειακά .

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνεται ο κύκλος (C): $(x+2)^2+(\psi-1)^2=25$ και τα σημεία $\mathrm{A}(-6,4)$, $\mathrm{B}(2,3)$, $\Gamma(4,5)$

Να βρείτε :

α. το κέντρο και την ακτίνα του .

β. τη σχετική θέση των Α , Β , Γ ως προς τον (C) .

ΑΣΚΗΣΗ 14

Δίνεται ο κύκλος (C): $(x-2)^2+(\psi-1)^2=10$ και οι ευθείες : ε_1: $3x+18=4\psi$ και ε_2: $2x-\psi=8$. Να βρείτε

α. τη σχετική θέση των ε_1 , ε_2 ως προς το κύκλο (C) .

β. τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 , ε_2 με το κύκλο αν υπάρχουν .

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δίνεται η εξίσωση (C): $x^2+\psi^2+\lambda x-(2\lambda+10)\psi+5\lambda+15=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (C) παριστάνει κύκλο $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

β. Να γράψετε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου συναρτήσει του λ

γ. Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (C) ανήκουν σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (C) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να βρείτε.

ε. Για ποια τιμή του λ το κέντρο του κύκλου (C) ανήκει στην ευθεία (ζ): $3x+15=\psi$;

στ. Για ποια τιμή του λ η ακτίνα του κύκλου (C) είναι $\rho=5$;

Επιλεγμένα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)