ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Α. Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις:

Ι. $\left(2^{2^3}\cdot 4^{-2^2}\right)^2=1$ Σ Λ

ΙΙ. Αν για τον θετικό αριθμό x ισχύει η σχέση:

$\left(1+2+x+4\right)^2=1^3+2^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^9+4^3$ τότε $x=3$ Σ Λ

ΙΙΙ. $\dfrac{3^{15}+3^{14}}{3^{14}+3^{12}}\cdot\dfrac{(-2)^9}{1024}=\dfrac{9}{5}$ Σ Λ

Β. Η ανίσωση $\dfrac{3x}{-2}+\dfrac{x-1}{4}>-1$ είναι ισοδύναμη με την α. $x>-2$ β. $x<2x+1$ γ. $x<\dfrac{3}{5}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. i. $\left(2^{2^3}\cdot 4^{-2^2}\right)^2=\left(2^8\cdot\dfrac{1}{4^{2^2}}\right)^2=\left(2^8\cdot\dfrac{1}{4^4}\right)^2=\left(2^8\cdot\dfrac{1}{\left(2^2\right)^4}\right)^2=\left(\dfrac{2^8}{2^8}\right)^2=1^2=1$ Σωστό.

ii. Κάνουμε επαλήθευση στην δεδομένη σχέση για $x=3$ ή έχουμε

$\left(1+2+3+4\right)^2=1^3+2^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^9+4^3\Leftrightarrow 10^2=1^3+2^3+3^3+4^3\Leftrightarrow 100=1+8+27+64\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100=100$ ισχύει Σωστό.

iii. $\dfrac{3^{15}+3^{14}}{3^{14}+3^{12}}\cdot\dfrac{(-2)^9}{1024}=\dfrac{3^{14}(3+1)}{3^{12}\left(3^2+1\right)}\cdot\dfrac{\left(-2^9\right)}{2^{10}}=\dfrac{3^{14}\cdot 4}{3^{12}\cdot 10}\cdot\dfrac{\left(-2^9\right)}{2^{10}}=\dfrac{3^{14}\cdot 2^2}{3^{12}\cdot 2\cdot 5}\cdot\dfrac{(-2)^9}{2^{10}}=-\dfrac{3^{14}\cdot 2^{11}}{3^{12}\cdot 5\cdot 2^{11}}=$

$=-\dfrac{3^2}{5}=-\dfrac{9}{5}$ Λάθος.

Β. $\dfrac{3x}{-2}+\dfrac{x-1}{4}>-1\Leftrightarrow -4\cdot\dfrac{3x}{2}+4\dfrac{(x-1)}{4}>-1\cdot 4\Leftrightarrow -6x+x-1>-4\Leftrightarrow -5x>1-4\Leftrightarrow -5x>-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{3}{5}$ Άρα (γ) σωστό.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Α. Αν $2\le x\le 5$ και $\left|2y\text{-}1\right|\le 5$ βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο αριθμός $\kappa=2x-3y+2$

Β. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_5=43$ και $\alpha_{23}=151$, να βρείτε τον α_{20} και το S_{20}.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Έχουμε $2 \le x \le 5 \quad (1)$ $|2y-1| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 2y-1 \le 5 \Leftrightarrow -5+1 \le 2y \le 5+1 \Leftrightarrow -4 \le 2y \le 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{2} \le y \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow -2 \le y \le 3 \quad (2)$

Από $(1) \xleftrightarrow{\cdot 2} 4 \le 2x \le 10 \quad (3)$

Από $(2) \xleftrightarrow{\cdot(-3)} 6 \ge -3y \ge -9 \Leftrightarrow -9 \le -3y \le 6 \quad (4)$

Προσθέτουμε (3) και (4) κατά μέλη και προκύπτει:

$4-9 \le 2x-3y \le 10+6 \Leftrightarrow -5 \le 2x-3y \le 16 \Leftrightarrow -5+2 \le 2x-3y+2 \le 16+2 \Leftrightarrow -3 \le \kappa \le 18$

Β.

$$\left.\begin{matrix} \alpha_5 = 43 \\ \alpha_{23} = 151 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega \\ \alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 43 = \alpha_1 + 4\omega \\ 151 = \alpha_1 + 22\omega \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -43 = -\alpha_1 - 4\omega \\ 151 = \alpha_1 + 22\omega \end{matrix}\right\} (+)\ 108 = 18\omega \Leftrightarrow \omega = 6$$

άρα $\alpha_1 = 19$

Επομένως $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega \Leftrightarrow \alpha_{20} = 133$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) \Leftrightarrow S_{20} = 520$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Α. Βρείτε τον $\lambda \in \Re$ ώστε οι ευθείες: (ε_1): $y = (5\lambda^2+1)x+2$, (ε_2): $y = 6\lambda x - 3$ να είναι παράλληλες.

Β. Για ποιες τιμές τον $\lambda \in \Re$ το τριώνυμο $f(x) = x^2 + (3\lambda-2)x + \lambda + 1$ έχει δύο ρίζες πραγματικές θετικές άνισες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.

$$\left.\begin{matrix} (\varepsilon_1): y = (5\lambda^2+1)x+2 \\ (\varepsilon_2): y = 6\lambda x\text{-}3 \\ (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 5\lambda^2+1 = 6\lambda \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \\ \Delta = (-6)^2 - 4\cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 16 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 5} = \frac{6 \pm 4}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Β. $f(x) = x^2 + (3\lambda-2)x + \lambda + 1$. Το να έχει το τριώνυμο ρίζες πραγματικές θετικές και άνισες σημαίνει ότι:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}(3\lambda\text{-}2)^2-4(\lambda+1)>0\\ \dfrac{\lambda+1}{1}>0\\ -\dfrac{(3\lambda-2)}{1}>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}9\lambda^2-12\lambda+4-4\lambda-4>0\\ \lambda+1>0\\ -3\lambda+2>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}9\lambda^2-16\lambda>0\\ -3\lambda+2>0\\ \lambda+1>0\end{array}\right\}$$

<u>Πρόσημο:</u> $9\lambda^2-16\lambda$

$$9\lambda^2-16\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(9\lambda-16)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\dfrac{16}{9}\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & \frac{16}{9} & \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

<u>Πρόσημο:</u> $-3\lambda+2$

$$-3\lambda+2=0\Leftrightarrow-3\lambda=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} & \frac{2}{3} & \\ \hline + & 0 & - \end{array}$$

<u>Πρόσημο:</u> $\lambda+1$

$$\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$$

$$\begin{array}{ccc} & -1 & \\ \hline - & 0 & + \end{array}$$

	-1	0	2/3	16/9	
$9\lambda^2-16\lambda$	+	+	-	-	+
$-3\lambda+2$	+	+	+	-	-
$\lambda+1$	-	+	+	+	+

Σύνολο λύσεων: $(-1,0)$.

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω $\Omega = \{1,2,...,10\}$ ένα σύνολο. Θεωρούμε τα εξής υποσύνολα: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6\}$ και $\Gamma = \{5,6,9,10\}$

Να βρεθούν τα στοιχεία των συνόλων:

Α) $A \cap B$, **Β)** $A \cup B$, **Γ)** $A' \cap B'$,

Δ) $(A \cup B)'$, **Ε)** $A' \cup B'$, **ΣΤ)** $(A \cup B) \cap \Gamma'$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω (ε) η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που είναι παράλληλη προς την (ε) και διέρχεται από το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) που είναι κάθετη προς την (ε) και διέρχεται από το σημείο $B(1,1)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (2-\lambda)x - \lambda - 3 = 0$ έχει 2 ρίζες άνισες πραγματικές.

Β. Χωρίς να βρείτε τις παραπάνω ρίζες x_1, x_2 να βρείτε το $\lambda \in \Re$ ώστε

i) οι ρίζες να είναι αντίθετοι αριθμοί

ii) οι ρίζες να είναι αντίστροφοι αριθμοί

iii) να ισχύει $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (\lambda - 3)x + 4 + \lambda$, $\varepsilon_2 : y = (4\lambda - 9)x + 1$ να είναι παράλληλες

Β. Στη συνέχεια να βρεθεί εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το $A(-2,1)$ και είναι κάθετη στις δύο προηγούμενες ευθείες.

Γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η τελευταία ευθεία τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) $A \cap B = \{4\}$

Β) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Γ) $A' \cap B' = \{7,8,9,10\}$

Δ) $(A \cup B)' = \{7,8,9,10\} = A' \cap B'$

Ε) $A' \cup B' = \{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$

ΣΤ) $(A \cup B) \cap \Gamma' = \{1,2,3,4\}$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Αν α_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνση της ευθείας (ε_1) και επειδή (ε_1)//(ε) θα ισχύει ότι: $\alpha_1 = 2$
Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε_1) θα είναι: $y = 2x + \beta$

Και επειδή το σημείο $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε_1) οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν.

Οπότε: $\frac{1}{2} = 2\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \beta = -\frac{2}{3}$

Τελικά η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση: $y = 2x - \frac{3}{2}$

Β. Αν α_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνση της ευθείας (ε_2) και επειδή $(\varepsilon_2) \perp (\varepsilon)$ θα ισχύει ότι: $\alpha_2 \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2}$

Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε_2) θα είναι: $y = -\frac{1}{2}x + \beta$

Και επειδή το σημείο $B(1,1)$ ανήκει στην ευθεία (ε_2) οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν.

Οπότε: $1 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2}$

Τελικά η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω η εξίσωση $x^2 + (2-\lambda)x - \lambda - 3 = 0 \quad (1)$, για να έχει αυτή 2 ρίζες πραγματικές και άνισες αρκεί $\Delta > 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(-\lambda-3) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda + 12 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 16 > 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in R$.

Β. i) Για να είναι οι ρίζες αντίθετοι αριθμοί αρκεί

$$S = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-2}{1} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

ii) Για να είναι οι ρίζες αντίστροφοι αριθμοί αρκεί

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{-\lambda - 3}{1} = 1 \Leftrightarrow -\lambda - 3 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

iii) Για να ισχύει $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1 \Rightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -1 \Rightarrow P \cdot S = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda - 2)(-\lambda - 3) = -1 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 1 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 7 = 0, \quad \Delta = 29 > 0,$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 3)x + 4 + \lambda, \quad (\varepsilon_2): y = (4\lambda - 9)x + 1$ για να είναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ πρέπει:
$\lambda - 3 = 4\lambda - 9 \Rightarrow 3\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 2$ (επίσης για $\lambda = 2$ είναι: $4 + \lambda \neq 1 \Rightarrow 6 \neq 1$).

Β. Για $\lambda = 2$ οι εξισώσεις των ευθειών γίνονται: $(\varepsilon_1): y = -x + 6$, $(\varepsilon_2): y = -x + 1$, έστω η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$, για να είναι η $(\varepsilon) \perp (\varepsilon_1)$ ή $(\varepsilon) \perp (\varepsilon_2)$ αρκεί: $\alpha \cdot (-1) = -1 \Rightarrow \alpha = 1$, άρα $(\varepsilon): y = x + \beta$. Επειδή η (ε) διέρχεται από το $A(-2,1)$ θα είναι: $1 = -2 + \beta \Rightarrow \beta = 3$. Οπότε: $(\varepsilon): y = x + 3$.

Γ. Τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y είναι:
Για τον άξονα x΄x: θέτω $y = 0$ οπότε: $0 = x + 3 \Rightarrow x = -3$ άρα $B(-3,0)$.
Για τον άξονα y΄y: θέτω $x = 0$ οπότε: $y = 0 + 3 \Rightarrow y = 3$ άρα $\Gamma(0,3)$.

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|-\alpha| = \alpha$.

iii. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

iv. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \Re$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x) = 6x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \Re$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \Re$.

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) i) Λ, ii) Λ, iii) Σ, iv) Λ, v) Σ

β) Θεωρία σελ. 126.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι: $\alpha_6 = 41 + (6-1)\omega \Leftrightarrow 41 + 5\omega = 26 \Leftrightarrow \omega = -3$

β) Είναι: $\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow 41 + (\nu - 1)(-3) = \nu \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \nu = 11$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Το τριώνυμο έχει: $\Delta = -12 < 0$ οπότε είναι παντού ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$, δηλαδή $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Πρέπει: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, επομένως $\mathrm{A} = \left(-\infty, 2\right) \cup (2, +\infty)$

γ) Είναι: $f(x) = \left|\dfrac{x^3 - 2^3}{x-2}\right| = \left|\dfrac{(x-2((x^2+2x+4)}{x-2}\right| = \left|x^2 + 2x + 4\right| = x^2 + 2x + 4$,

καθώς από ερώτημα (α) $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

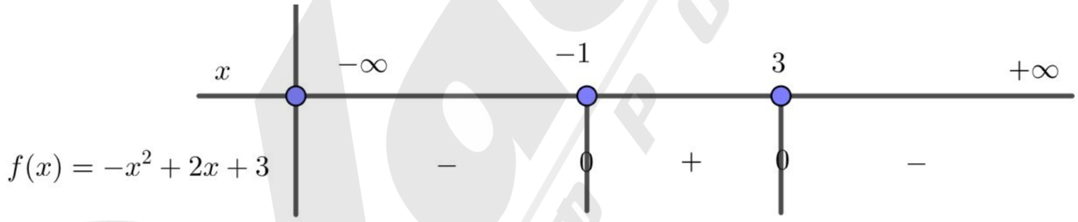
δ) Για να βρω κοινά σημεία εξισώνω τις συναρτήσεις για $x \neq 2$ και έχω:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Που απορρίπτεται αφού $x \neq 2$, επομένως δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, έχει Διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$ και ρίζες τις: $x_1 = 3$ και $x_2 = -1$. Επομένως το πρόσημό του είναι:



Επομένως:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3) \text{ και } f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

β) Είναι: $2{,}999 \in (-1, 3)$, άρα $f(2{,}999) > 0$ και $-1{,}002 < -1$ άρα $f(-1{,}002) < 0$. Επομένως: $f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002) < 0$.

γ) Είναι: $-3 < a < 3 \Leftrightarrow 0 \leq |a| < 3$ και $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = f(\alpha) > 0$ από το πρώτο ερώτημα.

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Εξετάστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

(i) $\left(-1\right)^{\kappa+3}+\left(-1\right)^{\kappa+2}+\left(-1\right)^{\kappa+5}+\left(-1\right)^{\kappa+10}=0$ Σ Λ

(ii) $\left(-x^5\right)^{4\kappa}\cdot\left(-x\right)^{6\kappa}=x^{26\kappa}$ Σ Λ

(iii) το 33 διαιρεί τον $\kappa=16^5\cdot 2^{15}$ Σ Λ

Β. α. Δείξτε $\dfrac{\left(1-\alpha\right)\left(1-\alpha^2\right)+\alpha\left(\alpha+1\right)}{\alpha^2-\alpha+1}=\alpha+1$

β. Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda^2\left(x-1\right)-5x=-\lambda\left(\lambda-1\right)-\left(x+2\right)$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. α. Αν ο $x\in\Re$ η παράσταση $\left(2-|x|\right)\left(x-3\right)$ είναι θετική όταν:

i. $-1<x<1$ **ii.** $x>3$ **iii.** $x<-1$ **iv.** $x<-2$ ή $2<x<3$

β. Αν x<0 τότε η παράσταση $\left|4x-|x-1|\right|$ είναι:

i. $3x+1$ **ii.** $5x-1$ **iii.** $-5x+1$ **iv.** 1

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $4x^2=7|2x-1|+4x-13$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Δείξτε ότι $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}=2$

Β. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ δείξτε ότι $x^{\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}}\cdot x^{\alpha^{-1}\beta^2\gamma^{-1}}\cdot x^{\alpha^{-1}\beta^2\gamma^{-1}}=x^3$ $\left(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0\right)$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α. Δίνεται το τριώνυμο $f\left(x\right)=\left(\alpha+\beta+\gamma\right)x^2-2\sqrt{2\beta\gamma}\,x+\beta+\gamma\text{-}\alpha$ όπου α, β, γ τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$

i. Δείξτε ότι το τριώνυμο μπορεί να πάρει την μορφή $A\left(x-\kappa\right)^2$ $A\in\Re$.

ii. Δείξτε $\kappa<1$

β. Αν η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ έχει ρίζες x_1, x_2 δύο διαδοχικούς ακέραιους τότε ισχύει:

i. $\alpha^2-\beta^2=1$ **ii.** $\beta^2-4\alpha^2=1$ **iii.** $\alpha^2-4\beta=1$ **iv.** $\alpha^2+4\beta=1$

Β. Για ποιες τιμές του $\alpha\in R$ ισχύει: $\left(\alpha-1\right)x^2-\left(\alpha+1\right)x+\alpha+1>0$ για κάθε $x\in\Re$

Επιλεγμένα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)