ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Αν οι αριθμοί x και ψ είναι αντίστροφοι να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\left[\left(x^2y^3\right)^{-1}\cdot\left(xy^3\right)^2\right]^2}{\left(x^3y\right)^{-3}}$.

2. Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : $A=\sqrt{16\alpha^2\beta^4}+\sqrt{49\alpha^2\beta^4}$ και $B=\dfrac{5\alpha\sqrt{\alpha\beta^2}+6\beta\sqrt{\alpha^2\beta}}{5\sqrt{\alpha}+6\sqrt{\beta}}$.

3. Αν $\alpha>\beta>\gamma$ να βρεθεί το πρόσημο των παραστάσεων $A=\left(\alpha-\beta\right)\cdot\left(\beta-\gamma\right)$, $B=\left(\beta-\alpha\right)\cdot\left(\alpha-\gamma\right)\cdot\left(\gamma-\beta\right)$.

4. Αν είναι $A=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ να δειχθεί ότι $A=0$.

5. Να υπολογίσετε την παράσταση : $A=5\sqrt{\sqrt{64}}-2\sqrt{\sqrt{4}}+3\sqrt{3\sqrt{36}}$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P\left(x\right)=\left(5x^2+2x-3\right)^2-\left(x^2-2x-3\right)^2$
α) να κάνετε τις πράξεις β)να παραγοντοποιήσετε το P(x)
γ) να λύσετε την εξίσωση $P\left(x\right)=0$.

7. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:
α. $x^2-2x=......$, β. $2x-4=........$, γ. $8x\cdot\left(x^2-2x\right)-9\left(2x-4\right)=......$

8. Να γίνει γινόμενο η παράσταση : $\left(4x^2-3x-8\right)^2-\left(4x^2+3x\right)^2$.

9. **α)** Να αποδειχθεί ότι: $x^2+\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta=\left(x+\alpha\right)\left(x+\beta\right)$.
β) Να γίνει γινόμενο η παράσταση x^2-4x+3.

10. Να εκτελέσετε τις πράξεις: $\left(2\alpha+1\right)^2-\left(3\alpha-2\right)^2-\left(2\alpha+5\right)$ και να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης, για $\alpha=-2$.

11. Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, όταν το τετράγωνό του ελαττωμένο κατά το πενταπλάσιό του, είναι 24.

12. Να κάνετε τις πράξεις
i) $-2x\left(1-3x\right)^2+2\left(x-3\right)\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)-\left(2x+1\right)^3$ ii) $\dfrac{x^2-3x+2}{4\left(x+2\right)^2-9\left(3-x\right)^2}$.

13. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\dfrac{\alpha^4 x-\beta^4 x}{2\alpha^3+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+2\beta^3}$.

14. Αν $x+y=9$ και $x\cdot y=20$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: $A=x^2+y^2$, $B=x^3+y^3$, $\Gamma=x^4+y^4$.

15. Να υπολογισθεί η παράσταση $A=\left[\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2:\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right]\cdot\left[\dfrac{\alpha\beta^2+\alpha^2\beta}{\alpha^3-\beta^3}\right]\cdot\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right]$.

16. Αν $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$, να βρεθούν: i) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$ ii) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

17. Να κάνετε τις διαιρέσεις i) $\dfrac{x^2+xy}{y}:\dfrac{x^2-y^2}{-2y^2}$ ii) $\dfrac{10x^2-5x}{1+4x+4x^2}:\dfrac{25x}{8x^2-2}$.

18. Να κάνετε τις πράξεις: i) $\dfrac{\dfrac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}}{\dfrac{\mu+\nu}{\mu-\nu}}$ ii) $\dfrac{\dfrac{x^2-x}{y^2\omega+y^3}}{\dfrac{x^2-1}{y^2\omega-\omega^3}}$.

19. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : i) $\dfrac{(x+y)^3-3x^2y-3xy^2}{\left(x^2+y^2-x^3y-xy^3\right)}$ ii) $\dfrac{x^5y^2+x^2y^2}{x^6+y^4-x^5y^5+x^4y^6}$.

20. Να γίνουν οι πράξεις : α) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2\beta^2-\beta^4}{\alpha^3-\beta^3}}{\dfrac{\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}$ β) $\dfrac{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}}$.

21. Να δειχθεί ότι : $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\gamma+\alpha)$.

22. Να γίνουν οι πράξεις : $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}-\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}+\dfrac{x^2-y^2+2y^3}{x^2-y^2}$.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</u>

23. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\dfrac{2}{3x+1}=\dfrac{1}{3x-1}$ ii) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{2-x}$

iii) $3x\left(x^2+1\right)(2x-8)=0$.

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2}{x-1}-5=\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$ β) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

γ) $\frac{2x-2}{x-2}-\frac{x}{3-x}=\frac{3}{x^2-5x+6}+4$.

25. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3}{x+2}-\frac{6x}{(x+2)(x-2)}=\frac{3}{x-2}$.

26. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x-2}{x-2}-\frac{x}{3-x}-4=\frac{3}{x^2-5x+6}$.

27. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{19x-24}{x^2-6x+9}-\frac{9}{x-3}+\frac{17x+9}{x^2-9}=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

28. Να λυθεί το σύστημα: $2(x-2y)-3x=-5$, $\frac{2y-2x}{3}+\frac{x-2}{5}=3$.

29. Να λυθεί το σύστημα: $x-y=2$, $y^2+xy=60$.

30. Να λυθούν τα συστήματα: i) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy=15 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$.

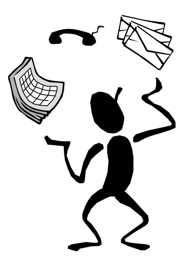
31. Να λυθούν τα συστήματα : i) $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{3x-y+2}{2}=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y \\ \frac{x-2y}{3}-1=x-\frac{y}{2} \end{cases}$.

32. Να λυθούν τα συστήματα : i) $\begin{cases} y\le 1-x \\ y\ge x+1 \\ x-2y\le 4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y\le x \\ x+y\le 6 \\ y\ge 0 \\ x\le 3 \end{cases}$.

33. Να λυθεί το σύστημα $4x+y-3(2x+y)=-2$, $x-3y-2(x-2y)=3$

34. Δύο αριθμοί έχουν διαφορά 3 και γινόμενο 88. Να βρεθούν οι αριθμοί (με εξίσωση β΄ βαθμού).

35. Να λυθεί το σύστημα: $2x-3y=13$, $\frac{3x}{5}-\frac{x-3y}{2}=-1$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

36. Να βρεθούν τα α, β ώστε η ευθεία $\alpha x+\beta y=4$ να διέρχεται από τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,2)$.

37. Να βρεθεί το κ ώστε η εξίσωση $(x+\kappa)^2+2(x+\kappa)-15=0$ να έχει ρίζα τον αριθμό 4.

38. Να βρεθεί το κ ώστε οι τρεις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις $x-y=-2$, $3x-4y+5=0$ και $2x+\kappa y=4$ να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

39. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y=-x^2+\alpha x+\beta$ αν είναι γνωστό ότι τέμνει τον yy΄ στο σημείο με τεταγμένη 5 και έχει κορυφή το $K(2,9)$.

40. Σε ποιο σημείο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=4x+5$ και $y=5x+3$.

41. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας $y=5x-3$ και της παραβολής $y=-3x^2+8x-3$.

42. Να βρεθεί το κ ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση $y=(3\kappa+2)x+\kappa$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $4x+y=3$.

43. Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση $3x-4y=12$.
i) Να κατασκευάσετε την ευθεία ε.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της ε με τους άξονες xx΄ και yy΄ αντίστοιχα.
iii) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

44. Δίνονται τα σύνολα $A=\{\chi\in\mathbb{Z}$, όπου $x\cdot(x^2-1)=0\}$ και $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$.
α) Να εξετάσετε εάν τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.
β) Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του Β.

45. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων το σύνολο
Α = { γράμματα της λέξης: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ } και να βρείτε το Ν(Α).

46. Ένα κουτί περιέχει 6 άσπρες, 10 μαύρες και 4 κόκκινες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα η μπάλα:
α) Να είναι άσπρη
β) Να είναι άσπρη ή μαύρη
γ) Να μην είναι μαύρη

47. Ρίχνουμε διαδοχικά ένα ζάρι και στη συνέχεια ένα νόμισμα καταγράφοντας το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης.

48. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε:

α) 3 φορές (Κ)
β) τουλάχιστον 2 φορές (Κ)
γ) το πολύ μια φορά (Γ)
δ) ακριβώς μια φορά (Γ)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

49. Παίρνουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ. Ορίζουμε δύο ίσα τμήματα ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα στις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΒ του τριγώνου. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΒ και τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΒ.

50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έξω από αυτό παίρνουμε τα τμήματα $\mathrm{AM} = \mathrm{AB}$ και $\mathrm{AP} = \mathrm{A\Gamma}$ έτσι ώστε $\widehat{\mathrm{BAM}} = \widehat{\mathrm{\Gamma AP}}$. Να δείξετε ότι : i) Τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΑΓΜ είναι ίσα. ii) $\mathrm{BP} = \mathrm{\Gamma M}$

iii) $\widehat{\mathrm{ABP}} = \widehat{\mathrm{AM\Gamma}}$ και $\widehat{\mathrm{A\Gamma M}} = \widehat{\mathrm{APB}}$.

51. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ των μη παραλλήλων πλευρών του ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν η προέκταση της ΑΖ τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Η, να δείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $\mathrm{ABZ} = \mathrm{H\Gamma Z}$ είναι ίσα   ii) Η ΕΖ είναι παράλληλη προς τις βάσεις

iii) $\mathrm{EZ} = \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{\Gamma\Delta}}{2}$.

52. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ με $\mathrm{AE} = \dfrac{1}{6}\mathrm{A\Gamma}$. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στη διαγώνιο ΒΔ, που τέμνει τις ΑΔ και ΑΒ στα σημεία Κ και Μ αντίστοιχα.

i) Να εξετάσετε αν είναι όμοια τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΔΒ.

ii) Να δείξετε ότι $\mathrm{KM} = \dfrac{1}{3}\mathrm{B\Delta}$.

iii) Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΜ, ΑΔΒ.

53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε τα ύψη του ΑΚ, ΒΛ και ΓΜ. Να δειχθεί ότι $\mathrm{AK} + \mathrm{B\Lambda} + \mathrm{\Gamma M} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A}$.

54. Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A} = 90^\circ\right)$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ.

i) Να δείξετε ότι $\widehat{\mathrm{\Delta A\Gamma}} = \widehat{\mathrm{B}}$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια.

ii) Αν $\mathrm{B\Delta} = 3\ \mathrm{cm}$ και $\mathrm{\Delta\Gamma} = 7\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ.

55. Δίνεται γωνία χοψ και στην Οχ παίρνουμε σημεία Α και Β και στην Οψ σημεία Γ και Δ έτσι ώστε $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma}$ και $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Delta}$. Αν Ε είναι η τομή των ΑΔ και ΒΓ να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα

56. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ προς τις κορυφές Β, Γ, Α και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα $\mathrm{BK} = \mathrm{\Gamma\Lambda} = \mathrm{AM}$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

57. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε τις ΒΕ και ΓΖ κάθετες στην διχοτόμο ΑΔ. Να δείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι όμοια.

β) τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΖΔ είναι όμοια.

γ) $\frac{AE}{AZ} = \frac{\Delta E}{\Delta Z}$

58. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ. Αν Κ, Μ, Ν, τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα να συγκριθούν τα ΔΚ και ΜΝ και να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου ΚΔΜΝ.

59. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και γωνία $A = 120^o$, φέρνουμε τη μεσοκάθετο ΕΔ της πλευράς ΑΒ, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ και την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 3B\Delta$.

Υπόδειξη : Φέρνουμε $AZ//E\Delta$.

60. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ, ΔΓ στα σημεία Ε, Ζ, Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $AE^2 = EZ \cdot EH$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

61. Να αποδειχθεί ότι: $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

62. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$

63. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ και $180^o \le \omega \le 270^o$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\varepsilon\varphi^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega$

64. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\varepsilon\varphi^2\theta} = \sigma\varphi^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta$.

65. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu y$.

66. i) Να δείξετε ότι: $1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ ii) Αν $15\varepsilon\varphi\omega + 8 = 0$ και $90^o < \omega < 180^o$ να βρείτε το ημω.

67. i) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ και $90^o < \omega < 180^o$ να βρείτε ημω και εφω.

ii) Να δείξετε ότι : $\eta\mu^2\varphi \cdot \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu^2\varphi + \eta\mu^2\omega - 1$.

68. Να δείξετε ότι: i) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{1}{\varepsilon\varphi x}} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

69. Να δείξετε ότι: i) $\eta\mu^2 50^o + \eta\mu^2 40^o = 1$ ii) $\eta\mu^2 70^o + \sigma\upsilon\nu^2 110^o = 1$

iii) $\eta\mu^2(45^o - \omega) + \eta\mu^2(45^o + \omega) = 1$.

70. Αν, Α, Β, Γ είναι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ να δειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις : $\eta\mu\frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} = \eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

71. Να δειχθεί ότι : $(\varepsilon\varphi x - \eta\mu x)^2 + (1-\sigma\upsilon\nu x)^2 = \left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1\right)^2$

72. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθεί ότι ισχύει: $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha$.

73. Αν είναι $0^o \le x \le 180^o$ να υπολογίσετε την γωνία x όταν :

- $2\eta\mu x - 0,3 = 1,4\eta\mu x$
- $5\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 3\sigma\upsilon\nu x$ αν $90^o \le x \le 180^o$
- $\varepsilon\varphi^2 x + 4\varepsilon\varphi x + 1 = 0$
- $8\eta\mu^2 x = 2$
- $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$.

74. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu 150^o \cdot \sigma\upsilon\nu 135^o \cdot \varepsilon\varphi 120^o = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

75. Να δείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A = 90^o)$ ισχύει : $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi B} + \dfrac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma} = \dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}$.

76. Αν Α ,Β ,Γ είναι οι γωνίες ορθογωνίου τριγώνου να δείξετε ότι :

α) $\eta\mu(A+B+\Gamma) = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu(A+B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$

γ) $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$ δ) $\eta\mu\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}$

77. Να αποδείξετε ότι : α) $\varepsilon\varphi(90^o - x) = \sigma\varphi x$ β) $\eta\mu^2(180-\omega)\sigma\varphi^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega$

γ) $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ δ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

78. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει :

$$A(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta(\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$$

79. Να εκφράσετε συναρτήσει των πλευρών ενός τριγώνου τα συνA, συνB, συνΓ και να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

Θέμα 1

Α) Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α; Να γράψετε τις ιδιότητες των ριζών.

Β) Να γράψετε το ανάπτυγμα $(\alpha+\beta)^2$ και να το αποδείξετε .

i) Αν ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$, να δείξετε ότι είναι $\alpha=0$ ή $\beta=0$

ii) Αν ισχύει $(\alpha+\beta)^2>\alpha^2+\beta^2$, να δείξετε ότι είναι οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι.

Γ) Πότε δυο τρίγωνα είναι όμοια ; Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας;

Θέμα 2

Αποδείξτε ότι : Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ})$.

Ι) οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες

ΙΙ) η διάμεσος του ΑΜ είναι διχοτόμος και ύψος.

Θέμα 3

Α) Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{2-x}=\frac{3}{x^2-3x+2}+4$.

Β) Πότε μια τετραγωνική συνάρτηση έχει μέγιστο; Με τι ισούται το μέγιστο αυτό;

Θέμα 4

Α) Να δειχθεί ότι: $\text{συν}^2x\cdot\text{συν}^2y-\text{ημ}^2x\cdot\text{ημ}^2y=\text{συν}^2x+\text{συν}^2y-1$

Β) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

Θέμα 5

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και στην Οx παίρνουμε σημεία Α και Β και στην Οy σημεία Γ και Δ έτσι ώστε ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ. Αν Ε είναι η τομή των ΑΔ και ΒΓ να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

Θέμα 1

Α) σελ. 20 σχ. βιβλίου

Β) σελ. 43 σχ. βιβλίου

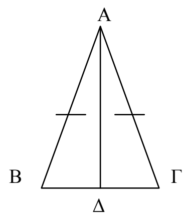
i) Ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow 2\alpha\beta=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=0$

ii) Ισχύει $(\alpha+\beta)^2>\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2>\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow 2\alpha\beta>0\Leftrightarrow\alpha\beta>0\Leftrightarrow\alpha,\beta$ ομόσημοι

Γ) σελ. 220 σχ βιβλίου

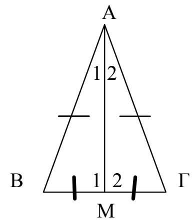
Θέμα 2

Σχήμα 1



Ι) Φέρνουμε το ύψος ΑΔ .
Τότε τα ορθογώνια ΔΑΒ και ΔΑΓ έχουν
$\{AB = A\Gamma,\ A\Delta$ κοινή$) \Rightarrow$ τριγ.$\Delta AB = \Delta A\Gamma$
(σύμφωνα με το κριτήριο υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά….)
άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Σχήμα 2



ΙΙ) Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ .
Τότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ έχουν
$\{AB = A\Gamma,\ AM$ κοινή, $MB = M\Gamma) \Rightarrow$ τριγ.$MAB = MA\Gamma$
(σύμφωνα με το κριτήριο τρεις πλευρές ίσες), άρα $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$
οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος και ακόμη είναι $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.
Επειδή όμως $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180°$, αφού αποτελούν ευθεία γωνία θα είναι
$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^o \Rightarrow AM \perp B\Gamma$, δηλαδή η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος του τριγώνου.

Θέμα 3

Α) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{x^2-3x+2} + 4 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{(x-1)(x-2)} + 4$ αφού $2-x = -(x-2)$ και $(x-1)\cdot(x-2) = x^2-3x+2$.

Ε.Κ.Π : $(x-1)\cdot(x-2)$.Πρέπει $(x-1)\cdot(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ και $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Έτσι έχουμε :

$$(x-1)(x-2)\frac{2x}{x-1} + (x-1)(x-2)\frac{x+1}{x-2} = (x-1)(x-2)\frac{3}{(x-1)(x-2)} + 4(x-1)(x-2) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)2x + (x-1)(x+1) = 3 + 4(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 2x^2-4x+x^2-1 = 3+4\left(x^2-2x-x+2\right) \Leftrightarrow$$

$$2x^2-4x+x^2-1 = 3+4x^2-8x-4x+8 \Leftrightarrow 2x^2-4x+x^2-1-3-4x^2+8x+4x-8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x^2+8x-12 = 0 \Leftrightarrow x^2-8x+12 = 0$$

Είναι $\alpha = -1,\ \beta = -8,\ \gamma = 12$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4\cdot1\cdot12 = 64-48 = 16$.

Άρα οι ρίζες είναι $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2\cdot1} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = 6 & \text{,δεκτή} \\ \frac{8-4}{2} = 2 & \text{,απορρίπτεται αφού } x \neq 2 \end{cases}$

Β) Η γραφική παράσταση της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι μια παραβολή για την οποία ισχύει :
Ι) Άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
ΙΙ) Έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

III) Αν $\alpha > 0$ η $f(x)$ έχει ελάχιστο το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$

IV) Αν $\alpha < 0$ η $f(x)$ έχει μέγιστο το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$

<u>Θέμα 4</u>

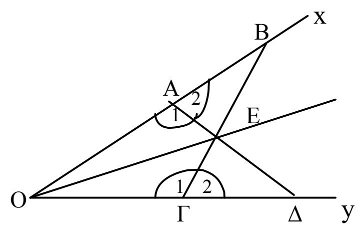
Α) $\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 y - \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 y = \sigma\upsilon\nu^2 x\left(1-\eta\mu^2 y\right) - \left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\cdot \eta\mu^2 y =$

$\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 y - \left(\eta\mu^2 y - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 y\right) = \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 y - \eta\mu^2 y + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 y =$

$\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 y = \sigma\upsilon\nu^2 x - \left(1-\sigma\upsilon\nu^2 y\right) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 y - 1$

Β) σελ. 206 σχ. βιβλίου

<u>Θέμα 5</u>



Είναι $\overset{\Delta}{A O \Delta} = \overset{\Delta}{B O \Gamma}$ γιατί έχουν:

α) $OA = O\Gamma$

β) $OB = O\Delta$

γ) $A\hat{O}\Gamma$ κοινή άρα $\hat{B} = \hat{\Delta}$ και $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$.

Είναι $\overset{\Delta}{A B E} = \overset{\Delta}{\Gamma \Delta E}$ γιατί έχουν:

α) $AB = \Gamma\Delta$ ως διαφορές ίσων τμημάτων

β) $\widehat{A_2} = \widehat{\Gamma_2}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$

γ) $\hat{B} = \hat{\Delta}$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

Θέμα 1

Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Θέμα 2

Α) Να διατυπώσετε τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων.Να αποδειχθεί ο νόμος των συνημιτόνων.
Β) Πότε μια συνάρτηση λέγεται τετραγωνική; Τι γνωρίζεται για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

Θέμα 3

Α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2 40^o + \eta\mu^2 140^o = 1$ και $\sigma\upsilon\nu^2 130^o - \eta\mu^2 140^o = 0$

Β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{2}x + 1$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

Θέμα 4

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{matrix} x + 2y = 7 \\ x^2 - xy = -2 \end{matrix}$

Θέμα 5

Α) Αν $\varepsilon\varphi\omega = -\dfrac{5}{12}$ και $90 < \omega < 180$ να υπολογιστεί το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

Β) Να αποδείξετε ότι αν α, β ομόσημοι και $\alpha < \beta$ τότε $\dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$

ΛΥΣΗ

Θέμα 1

σελ. 240 σχ. βιβλίου

Θέμα 2

Α) σελ. 244-245 σχ. βιβλίου
Β) σελ. 150-151-145 σχ. βιβλίου

Θέμα 3

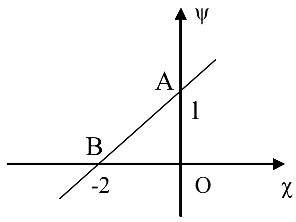
Α) Είναι : $\eta\mu 140^o = \eta\mu\left(180^o - 40^o\right) = \eta\mu 40^o$

οπότε $\sigma\upsilon\nu^2 40^o + \eta\mu^2 140^o = \sigma\upsilon\nu^2 40^o + \eta\mu^2 40^o = 1$

$\sigma\upsilon\nu 130^o = \sigma\upsilon\nu\left(180^o - 50^o\right) = -\sigma\upsilon\nu 50^o$ και $\eta\mu 140^o = \eta\mu\left(180^o - 140^o\right) = \eta\mu 40^o$

οπότε $\sigma\upsilon\nu^2 130^o - \eta\mu^2 140^o = \sigma\upsilon\nu^2 50^o - \eta\mu^2 40^o = \sigma\upsilon\nu^2\left(90^o - 40^o\right) - \eta\mu^2 40^o = \eta\mu^2 40^o - \eta\mu^2 40^o = 0$

Β) Για $x=0 \Rightarrow y=1$ άρα $A(0,1)$ για $y=0 \Rightarrow x=-2$
άρα $B(-2,0)$



Η γραφική παράσταση της $y=\frac{1}{2}x+1$ είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α, Β.

Επομένως $E=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

<u>Θέμα 4</u>

Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς y, $2y=7-x \Rightarrow y=\frac{7-x}{2}$ (1).

Αντικαθιστούμε στην 2η εξίσωση και έχουμε :

$$x^2-x\left(\frac{7-x}{2}\right)=-2 \Rightarrow 2x^2-7x+x^2=-4 \Rightarrow 3x^2-7x+4=0.$$

Είναι $\alpha=3,\ \beta=-7,\ \gamma=4$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 4=49-48=1$

Άρα οι ρίζες είναι :

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 3}=\begin{cases}\frac{7+1}{6}=\frac{4}{3}\\[4pt] \frac{7-1}{6}=1\end{cases}$$

Για $x=\frac{4}{3}$ από την (1) προκύπτει $y=\frac{17}{6}$ ενώ για $x=1$ προκύπτει $y=3$.

Οι λύσεις είναι : $(x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{17}{6}\right)$ και $(x,y)=(1,3)$

<u>Θέμα 5</u>

Α) $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1 \Leftrightarrow 1+\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow 1+\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

άρα $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\dfrac{1}{1+\frac{25}{144}}=\dfrac{1}{\frac{144+25}{144}}=\dfrac{1}{\frac{169}{144}}=\dfrac{144}{169}$

Επειδή $90<\omega<180$ είναι $\sigma\upsilon\nu\omega<0$, άρα $\sigma\upsilon\nu=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

Β) Αφού α, β ομόσημοι σημαίνει ότι $\alpha\cdot\beta>0$. Αφού $\alpha<\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta}<\frac{\beta}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$