ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-x^3+\overline{x}x^2-s^2x+2$ όπου $\overline{x}$ η μέση τιμή και s^2 η διακύμανση ενός δείγματος ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση $\psi=-24x-6$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και τη διακύμανση s^2.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{f''(x)}$

δ) Να δείξετε ότι το δείγμα των ν παρατηρήσεων της μεταβλητής X δεν είναι ομοιογενές.

ε) Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό $c>0$ που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε μια από τις ν παρατηρήσεις της μεταβλητής X ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές .

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου $A(-1,f(-1))$ επαληθεύουν και την C_f και την $\psi=-24x-6$

$f'(-1)=-24$ και $f(-1)=-24(-1)-6=18$ όπου

$f'(x)=(-x^3+\overline{x}x^2-s^2x+2)'=-3x^2+2\overline{x}x-s^2$

$$\begin{cases} f'(-1)=-24 \\ f(-1)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(-1)^2+2\overline{x}(-1)-s^2=-24 \\ -(-1)^3+\overline{x}(-1)^2-s^2(-1)+2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overline{x}+s^2=21 \\ \overline{x}+s^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}=6 \\ s^2=9 \end{cases}$$

β) Η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$ τότε $f'(x)=-3x^2+12x-9$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+12x-9=0$ με ρίζες

$x=1, x=3$ Τότε από τον πίνακα μονοτονίας

Για $x\in(-\infty,1]$ και $[3,+\infty)$ η f $\searrow$ γνησίως φθίνουσα .

Για $x\in[1,3]$ η f $\nearrow$ γνησίως αύξουσα .

Για $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=-1+6-9+2=-2$

Για $x=3$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(3)=2$

	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		Τ.Ε.		Τ.Μ.	

γ) $f'(x)=-3x^2+12x-9$ και $f''(x)=-6x+12$. Τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{f''(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^3+6x^2-9x+2}{-6x+12}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(-x^2+4x-1)}{-6(x-2)}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$$

δ) Από $s^2=9\Leftrightarrow s=3$. Τότε $CV_x=\frac{s_x}{\overline{x}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=50\%$ Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

ε) Αν προσθέσουμε κάθε όρο x_i με το c θα προκύψουν οι αριθμοί $\psi_i=x_i+c$ όπου $i=1,2,...,\nu$

Ισχύει : $\overline{\psi}=\overline{\chi}+c\Leftrightarrow\overline{\psi}=6+c$ και $s_\psi=s_x$ Άρα ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας CV_ψ γίνεται $CV_\psi=\frac{s_\psi}{\overline{\psi}}=\frac{s_x}{\overline{\psi}}=\frac{3}{6+c}\le 0,1\Leftrightarrow\frac{30}{6+c}\le 1\Leftrightarrow 30\le 6+c\Leftrightarrow c\ge 24$ άρα $c=24$.

2. Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση: $(E):\ \frac{1}{3}\left[\alpha\text{-}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{1-x^2}\right]=\frac{1}{2}\left[\alpha\cdot\lim_{x\to 2}\frac{|x+1|-2}{x^2-4x+3}+1\right]$

ΛΥΣΗ

Για να υπολογισθεί η εξίσωση Ε πρέπει να υπολογισθούν τα όρια που περιέχει **α)** $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{1-x^2}$

πρέπει $\left.\begin{array}{l}2x-1\ge 0\Leftrightarrow 2x\ge 1\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}\\ 1-x^2\ne 0\Leftrightarrow x\ne -1 \text{ και } x\ne 1\end{array}\right\}\Pi.O=\left[{}^{1}\!/\!_{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι $x\to 1$ όπου $1\notin\Pi.O$. <u>Τότε</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{2x-1}\right)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}{(1-x)(1+x)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1^2-\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{(1-x)(1+x)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-2x+1}{(1-x)(1+x)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{(1-x)(1+x)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}=$$

$$\frac{2}{(1+1)\left(1+\sqrt{2-1}\right)}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\qquad(1)$$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+1|-2}{x^2-4x+3}$

Πρέπει $x^2-4x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ και $x\neq 3$ Άρα: $\Pi.O=\Re-\{1,3\}$

Επίσης $x\to 2\Rightarrow x>-1$ τελικά $\Rightarrow x+1>0\Rightarrow |x+1|=x+1$

Τότε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+1|-2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1-2}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2-3}=-1 \quad (2)$

Τότε

$(E)\xrightarrow{(1),(2)}\dfrac{1}{3}\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(-\alpha+1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\dfrac{(2\alpha-1)}{2}=\dfrac{-\alpha+1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{2\alpha-1}{3}=\dfrac{-\alpha+1}{1}\Leftrightarrow$

$2\alpha-1=-3\alpha+3\Leftrightarrow 2\alpha+3\alpha=1+3\Leftrightarrow 5\alpha=4\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{4}{5}$

3. Μία βιομηχανία πουλάει έναν αριθμό x προϊόντων την εβδομάδα και η συνάρτηση είσπραξης είναι $E(x)=4000x-0,2x^2$ Ευρώ και κόστους $K(x)=1.000x+300.000$ Ευρώ των x προϊόντων.

i) Να βρείτε την συνάρτηση κέρδους

ii) Πόσα προϊόντα χρειάζεται να πουλήσει για να έχει μέγιστο κέρδος σε μια εβδομάδα και ποιο είναι αυτό;

iii) Να βρείτε το ετήσιο μέγιστο κέρδος που μπορεί να έχει η βιομηχανία.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση κέρδους P προκύπτει από την διαφορά της συνάρτησης είσπραξης E και της συνάρτησης κόστους K, δηλαδή :

$P(x)=E(x)\text{-}K(x)=4000x-0,2x^2-(1000x+300.000)=4000x-0,2x^2-1000x-300.000=$
$=3000x-0,2x^2-300.000,\ x\geq 0$

ii) Έχουμε $P'(x)=(3000x-0,2x^2-300.000)'=3000-0,4x,\quad x\geq 0$

οπότε $P'(x)=0\Leftrightarrow 3000-0,4x=0\Leftrightarrow -0,4x=-3000\Leftrightarrow \dfrac{-0,4x}{-0,4}=\dfrac{-3000}{-0,4}\Leftrightarrow x=7500$

	0	7.500	$+\infty$
ρ'	+	0	−
ρ	↗		↘
		Ο.Μ.	

Η βιομηχανία για να έχει μέγιστο κέρδος σε μια εβδομάδα πρέπει να πουλήσει $x=7500$ προϊόντα και το μέγιστο κέρδος της θα είναι :

$P(7500) = 3000\cdot 7500 - 0,2\cdot 7500^2 - 300.000 = 22.500.000 - 11.250.000 - 300.000 =$
$= 10.950.000$ Ευρώ

iii) Ετήσιο μέγιστο κέρδος η εταιρεία θα έχει αν παράγει κάθε εβδομάδα του χρόνου 7500 προϊόντα. Αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος έχει 52 εβδομάδες τότε το μέγιστο ετήσιο κέρδος θα είναι
$52\cdot P(7500) = 52\cdot 10.950.000 = 569.400.00$ Ευρώ

4. Δίνεται μια ομάδα τιμών: 1, 2, 2, 3, x, y, 7, 7, 8 που έχει διάμεσο $\delta = 6$ και Εύρος $R = 8$
Υπολογίστε:
i) τη μέση τιμή του δείγματος.
ii) την διακύμανση
iii) την τυπική απόκλιση
iv) τον συντελεστή μεταβλητότητας.

ΛΥΣΗ

Επειδή το Εύρος =μεγαλύτερη τιμή –μικρότερη τιμή τότε μία από τις τιμές χ ή ψ ισούται με 9 Έστω ψ=9 τότε η σειρά των αριθμών είναι 1 , 2 , 2 , 3 , χ , 7 , 7 , 8 , 9 .Επίσης $\delta = 6$ τότε επειδή το πλήθος των τιμών είναι περιττό μια από τις τιμές είναι το 6 .Επομένως χ=6 και οι αριθμοί γραμμένοι κατ' αύξουσα σειρά είναι 1, 2, 2, 3, 6, 7, 7, 8, 9

i) Ισχύει $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1+2+2+3+6+7+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$

ii) $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{x})^2 =$

$$= \frac{(1-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2}{9} =$$

$$= \frac{16+9+9+4+1+4+4+9+16}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

iii) Ισχύει $s^2 = 8 \Leftrightarrow s = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

iv) Ισχύει $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} = 0.56 = 56,5\%$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2011$
α) Να βρεθεί η παράγωγος της f
β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
γ) Βρείτε τα f(0), f(1) και δείξτε ότι $2012 > 2011$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$

ΛΥΣΗ

α) $f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x + 2011\right)' = \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + \left(3x\right)' + \left(2011\right)' = 3x^2 - 6x + 3$

β) $f'(x) = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R ενώ δεν παρουσιάζει ακρότατα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

γ) $f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 2011 = 2011, \quad f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 2011 = 2012$

για $x = 0, \quad x = 1$ έχω : $0 < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(1) \Rightarrow 2011 < 2012$ για κάθε $x \in R$

6. Ένα σφαιρικό μπαλόνι με αρχική ακτίνα $R = 10$ cm αρχίζει να χάνει αέρα και η ακτίνα του ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $R(t) = 10 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθούν:

α) Πόση θα είναι η ακτίνα του μπαλονιού μετά από 2 sec;

β) Το ρυθμό μεταβολής του όγκου του μπαλονιού σε συνάρτηση με το χρόνο t.

Υπόδειξη: Όγκος σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

ΛΥΣΗ

α) Η ακτίνα του μπαλονιού μετά από $t = 2$ sec θα είναι:

$$R(2) = 10 - 2^2 = 10 - 4 = 6 \text{ cm}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του μπαλονιού σε συνάρτηση με το χρόνο t θα είναι:

$$V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3(t)\right)' = \left[\frac{4}{3}\pi\left(10 - t^2\right)^3\right]' = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cancel{3}\left(10 - t^2\right)^2 \cdot \left(10 - t^2\right)' = 4\pi\left(10 - t^2\right)^2 \cdot (-2t) = -8\pi t\left(10 - t^2\right)^2$$

1^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$ όπου $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε :

α) το ρυθμό μεταβολής της f ως προς χ όταν :
   i) $x=1$
   ii) $x=-1$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(-1,f(-1)\right)$

γ) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

δ) το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x^3-3x-2}$

ΖΗΤΗΜΑ 2^{o}

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\alpha x^2+\beta x+7$ για την οποία ισχύουν $f'(1)=-5$,$f(3)=1$

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f'(x)<0$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f''(x)}{\sqrt{x^2+3}-2}$

ΖΗΤΗΜΑ 3^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x+6$ με $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα .

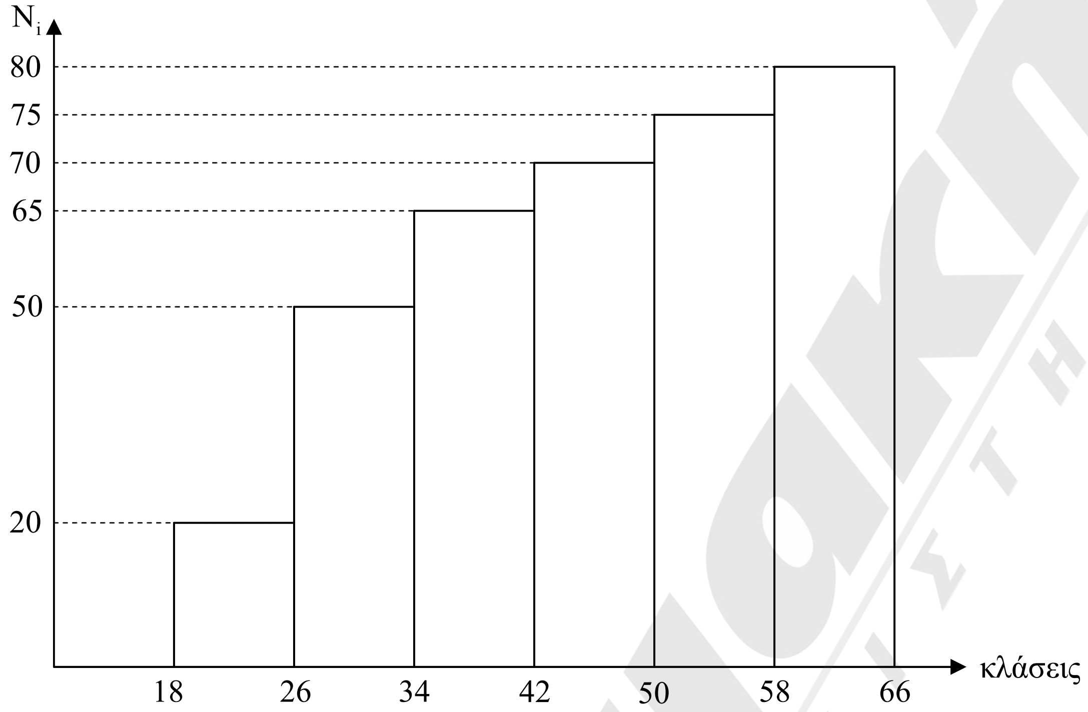
β) Να βρείτε σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης με τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{f''(x)+6}$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων αναφέρεται στην ηλικία των υπαλλήλων μιας εταιρίας .



α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας :

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	v_i	N_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$ Vi
ΣΥΝΟΛΟ						

β) Να βρεθούν :

i) η μέση τιμή η διακύμανση και η τυπική απόκλιση .

ii) ο συντελεστής μεταβολής CV . Είναι το δείγμα ομοιογενές ;

iii) ο αριθμός και το ποσοστό των ατόμων που είναι:

α) το πολύ 42 χρονών,

β) τουλάχιστον 58 χρονών

ΛΥΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^{o}

α) $f'(x)=\dfrac{2'(1+x^2)-2(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-2.2x}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

i) Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x για $x=1$ είναι το $f'(1)=-\dfrac{4.1}{(1+1)^2}=-1$

ii) Για χ = -1 έχουμε $f'(-1)=-\dfrac{4.(-1)}{(1+1)^2}=1$

β) $\psi-f(-1)=f'(-1)(x+1)$ οπου $f(-1)=\dfrac{2}{1+1^2}=1$ και $f(1)=\dfrac{2}{1+1^2}=1$

Τότε $\psi-1=1(x+1)$ Άρα (ε): $\psi=x+2$

γ) $f'(x)=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow -4x=0\Leftrightarrow x=0$

Όταν $x>0\Leftrightarrow -4x<0\Leftrightarrow -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}<0\Leftrightarrow f'(x)<0$

Όταν $x<0\Leftrightarrow -4x>0\Leftrightarrow -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$

Για $x\in(-\infty,0]$ η f $\nearrow$ γνησίως αύξουσα

Για $x\in[0,+\infty)$ η f $\searrow$ γνησίως φθίνουσα

Για $x=0$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(0)=\dfrac{2}{1+0}=2$

δ)

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^3-3x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}}{x^3-3x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{\dfrac{2(1+x^2)+4x}{(1+x^2)^2}}{(x+1)(x^2-x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2+2x^2+4x}{(1+x^2)^2(x+1)(x+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2(x^2+2x+1)}{(1+x^2)^2(x+1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+1)^2}{(1+x^2)^2(x+1)^2(x-2)}=\frac{2}{(1+1)^2(-1-2)}=\frac{2}{4(-3)}=-\frac{1}{6}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2^{o}

α) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\alpha x^2+\beta x+7$ και $f(3)=1\Leftrightarrow\dfrac{3^3}{3}+\alpha\cdot 3^2+\beta\cdot 3+7=1\Leftrightarrow 9+9\alpha+3\beta+7=1$

$\Leftrightarrow 9\alpha+3\beta=-15\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-5$

$f'(x)=x^2+2\alpha x+\beta$ και $f'(1)=-5\Leftrightarrow 1+2\alpha+\beta=-5\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6$

Τότε $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\3\alpha+\beta=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha-\beta=6\\3\alpha+\beta=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-8\end{cases}$

Άρα $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-8x+7$ και $f'(x)=x^2+2x-8$

β) $f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x-8<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4)<0 \Leftrightarrow -4<x<2$

γ) $f''(x)=(x^2+2x-8)'=2x+2$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f''(x)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to -1}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2\sqrt{4}+2}{-1-1}=\frac{6}{-2}=-3$$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

α) $f(x)=x^3+5x+6$, $f'(x)=3x^2+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επειδή η $f'(x)>0$ η $f\nearrow$ γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα .

β) Έστω σημείο $M\big(x_0,f(x_0)\big)$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης . Ισχύει $\lambda_\varepsilon=f'(x_0)$ Θα βρούμε το x_0 για το οποίο η $f'(x_0)$ γίνεται ελάχιστη .

$f''(x)=(3x^2+5)'=6x$ Τότε $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$

Ο πίνακας μονοτονίας της f' δίνεται δίπλα .

Άρα για $x_0=0$ η f' παρουσιάζει ελάχιστο το $f'(0)=5$

Επομένως στο σημείο $M\big(0,f(0)\big)$ ή $M\big(0,6\big)$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης .

γ) $\psi-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ όπου $x_0=0$, $f(0)=6$, $f'(0)=5$

Τότε $\psi-6=5(x-0) \Leftrightarrow \psi=5x+6$

δ) $$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{f''(x)+6}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x+6}{6x+6}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+6)}{6(x+1)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4 ο

α) Έχουμε:

$v_1 = N_1 = 20$

$v_2 = N_2 - N_1 = 50 - 20 = 30$

$v_3 = N_3 - N_2 = 65 - 50 = 15$

$v_4 = N_4 - N_3 = 70 - 65 = 5$

$v_5 = N_5 - N_4 = 75 - 70 = 5$

$v_6 = N_6 - N_5 = 80 - 75 = 5$

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 + 30 + 15 + 5 + 5 + 5 = 80$

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	v_i	N_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ Vi
[18-26)	20	20	22	-12	144	2.880
[26-34)	50	30	30	-4	16	480
[34-42)	65	15	38	4	16	240
[42-50)	70	5	46	12	144	720
[50-58)	75	5	54	20	400	2.000
[58-66)	80	5	62	28	784	3.920
ΣΥΝΟΛΟ	-	80	-	-	-	10.240

β) Έχουμε :

i) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = \dfrac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4 + x_5\nu_5 + x_6\nu_6}{\nu} = \dfrac{22\cdot 20 + 30\cdot 30 + 38\cdot 15 + 46\cdot 5 + 54\cdot 5 + 62\cdot 5}{80}$

$\bar{x} = \dfrac{2.720}{80} = 34$ Επίσης $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{\nu} = \dfrac{10.240}{80} = 128$ $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{128} \approx 11,3$

ii) Ισχύει : $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{11\cdot 3}{34} \approx 0,33$ Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

iii) α) Ο αριθμός των ατόμων που είναι το πολύ 42 χρονών είναι $V_1 + V_2 + V_3 = 20 + 30 + 15 = 65$ και το ποσοστό τους $\dfrac{65}{80}\cdot 100\% = 81,25\%$

β) Ο αριθμός των ατόμων που είναι τουλάχιστον 58 είναι $v_6 = 5$ και το ποσοστό τους $\dfrac{5}{80}\cdot 100\% = 6,25\%$.

2^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1^o

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=(3x-1)(x-1)^3$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

γ) Να αποδείξετε ότι : $16(3x-1)(x-1)^3+1\geq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

ΖΗΤΗΜΑ 2^o

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-5x+6$ και $g(x)=x-3$

Να βρείτε :

α) το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$

β) την τιμή της παράστασης $K=f'(7)+g'(2016)$

γ) το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)+g'(x)}{\sqrt{x^2+12}-4}$

ΖΗΤΗΜΑ 3^o

Οι τιμές 7 παρατηρήσεων μιας μεταβλητής είναι:

14, 20, 18, 20, 14, 18, 8.

α) Να βρείτε:
   i) τη διάμεσο
   ii) τη μέση τιμή
   iv) το εύρος
   v) την τυπική απόκλιση.

β) Αν όλες οι παρατηρήσεις μειωθούν κατά 2,6, τότε να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση.

γ) Αν όλες οι αρχικές παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 20%, να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση.

δ) Να εξετάσετε το αρχικό δείγμα ως προς την ομοιογένειά του.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \quad \text{όπου } x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=9$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{x^2-1}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 2016$