

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\operatorname{syn}x$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\operatorname{syn}x)' = -\eta\mu x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Να διατυπώσετε τον ορισμό του μέτρου του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=a+\beta i$, $a,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\beta$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Λ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$.

Μονάδες 5

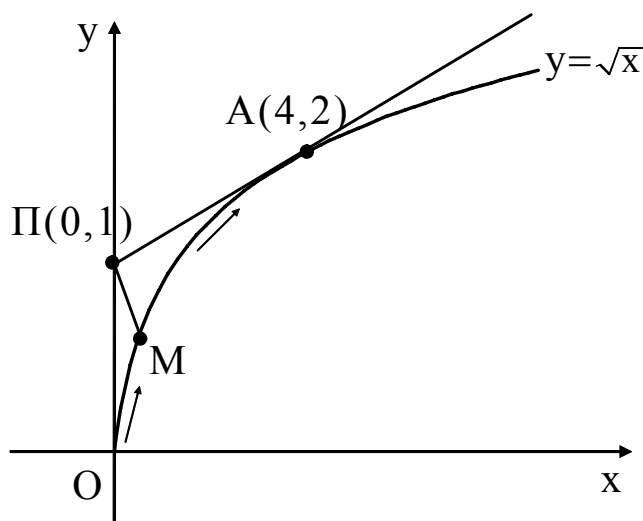
B4. Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $u = -i$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης, μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t > 0$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού είναι 4 m/min .

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Λ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(-2, \frac{5}{12})$ δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\kappa x^3 + (1-4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \quad (1)$$

είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**