ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 76 – Απόδειξη Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 157 – Ορισμός Κυρτής Συνάρτησης

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 216 – Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Α4.
α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_g=[1,+\infty)$ $D_h=[1,+\infty)$

Τότε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ ορίζεται για κάθε $x\in[1,+\infty)$ και ταυτόχρονα

$$h(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$$

Άρα $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$

Επίσης $r(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=(\sqrt{x})^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=$

$=x-\dfrac{1}{x}$, άρα $r(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x\in[1,+\infty)$

Β2. Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{x_1+1}{x_1-1}=\dfrac{x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow$

$(x_1+1)(x_2-1)=(x_1-1)(x_2+1)\Leftrightarrow \cancel{x_1x_2}-x_1+x_2=\cancel{x_1x_2}+x_1-x_2-1\Leftrightarrow$

$2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f “1-1” και επομένως αντιστρέφεται.

Β’ τρόπος: Η f συνεχής για κάθε $x>1$, τότε

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}<0 \text{ για κάθε } x>1$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε “1-1” και αντιστρέφεται

Τότε $f:(1,+\infty)\xrightarrow{\searrow}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1}f(x)\right)=(1,+\infty)$

Διότι $\lim\limits_{x+1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} \cdot \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

Άρα $f((1,+\infty)) = (1,+\infty)$

Υπολογισμός αντίστροφης f^{-1} :

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$, $y>1$

$y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$

όπου $x>1$, $y>1$

Άρα $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$ και $f^{1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$

Ισχύει $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x>1$

B3. $r(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $x \geqslant 1$

Η συνάρτηση $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και επομένως δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \beta$$

Άρα η $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$

B4. $(f^{1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \quad (1)$

ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x>1$

άρα (1) $\Rightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-4) \Leftrightarrow$

$x = \pm 1$ *απορρ.* ή $x = 4$ *δεκτή*

Άρα $x=4$ μοναδική λύση

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f(x) συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} = f(2)$ (1)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+4+e^{\lambda}) = -2\cdot 2+4+e^{\lambda} = e^{\lambda}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) = -2^2+4\cdot 2-3+\lambda = 1+\lambda$

Άρα (1) $\Rightarrow e^{\lambda} = 1+\lambda$, αλλά $e^x \geqslant 1+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ διότι η e^x είναι κυρτή και η $y=1+x$ είναι εφαπτόμενη στο $(0,1)$. Άρα $e^x \geqslant 1+x$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα $e^{\lambda} = 1+\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x+5 & , \quad 0\leqslant x<2 \\ -x^2+4x-3 & , \quad x\geqslant 2 \end{cases}$

Γ2. η f συνεχής για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Αν $0\leqslant x<2$ τότε $f'(x) = (-2x+5)' = -2<0$

Αν $x\geqslant 2$ τότε $f'(x) = (-x^2+4x-3)' = -2x+4\leqslant 0$,

διότι $x\geqslant 2 \Leftrightarrow 2x\geqslant 4 \Leftrightarrow 2x-4\geqslant 0 \Leftrightarrow 4-2x\leqslant 0$

Επομένως

x	0 2	$+\infty$
f′	−	−
f	↘	↘

Άρα f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, μοναδικό ακρότατο παρουσιάζει στη θέση 0 και είναι Ολικό Μέγιστο το $f(0)=5$

Γ3. i) Για να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. η f στο $[0,3]$, αρκεί η f να είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$

- Η f συνεχής στο $[0,3]$ από το Γ1
- Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

Επομένως η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. $[0,3]$

ii) Αν υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$ τότε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} \Leftrightarrow -2 = \dfrac{0-5}{3} \Leftrightarrow -6 = -5$ *άτοπο*

Για $\xi_2 \in (2,3)$ τότε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} \Leftrightarrow -2\xi_2+4 = \dfrac{-5}{3} \Leftrightarrow -2\xi_2 = \dfrac{-5}{3} - 4 \Leftrightarrow$

$\xi_2 = \dfrac{17}{6} \in (2,3)$ άρα για $\xi = \dfrac{17}{6}$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma\left(\dfrac{17}{6}, f\left(\dfrac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ

Γ4. $f(2)=1$, ισχύει $\upsilon(t) = y'(t) = 0,5\ \mu/\text{sec}$, $y(t_0) = f(2) = 1$

$\varepsilon\varphi\omega(t) = \dfrac{y(t)}{2} \Rightarrow (\varepsilon\varphi\omega(t))' = \left(\dfrac{y(t)}{2}\right)' \Rightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \dfrac{1}{2}y'(t) \Leftrightarrow$

$\omega'(t) = \sigma\upsilon\nu^2\omega(t) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot y'(t)$

για $t = t_0 \Rightarrow \omega'(t_0) = \sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)\dfrac{1}{2}y'(t_0)$ όπου $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Άρα $\omega'(t_0) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5} = 0,2\ rad/\text{sec}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + a$, $x \in (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow 1-\ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x} < 0 \Leftrightarrow 1-\ln x < 0 \Leftrightarrow x > e$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$. Στην θέση $x = e$ έχει μέγιστο το $f(e) = \dfrac{1}{e} + a$

Από το σύνολο τιμών της f που είναι δεδομένο από την εκφώνηση πρεπει

$\dfrac{1}{e} + 1 = \dfrac{1}{e} + a \Leftrightarrow a = 1$

Δ2. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1 = (0, e]$ και $\Delta_2 = [e, +\infty)$

$f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right] = \left(-\infty, 1+\dfrac{1}{e}\right)$ αφού $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} + 1 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\right) + 1 = -\infty$

$f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right] = \left(1, 1+\dfrac{1}{e}\right]$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} + 1 = 1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$ αφού μόνο στο $f(\Delta_1)$ περιέχεται το μηδέν. Η f συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+1=2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1=2\cdot(\ln 1-\ln 2)+\ln(e)=-2\ln 2+\ln e=\ln e-\ln 4=\ln\frac{e}{4}\overset{e<4}{<}0$

- $f(1)=1>0$

Δηλαδή $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, και το x_0 είναι μοναδικό.

Δ3. Είναι γνωστό το σύνολο τιμών της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$ δηλαδή $f(\Delta_1)=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$, $f(\Delta_2)=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$

Ο αριθμός $2\in(0,e]$ και $f(2)=\frac{\ln 2}{2}+1$

Ο αριθμός $4\in[e,+\infty)$ και $f(4)=\frac{\ln 2}{2}+1$

Άρα $f(2)=f(4)$

Το $\frac{\ln 2}{2}+1\in f(\Delta_1)$ και το $\frac{\ln 2}{2}+1\in f(\Delta_2)$ και λόγω μονοτονίας σε κάθε διάστημα υπάρχει μόνο ένα x σε κάθε διάστημα. Άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{\ln 2}{2}+1$ έχει δύο ακριβώς λύσεις τις $x=2$ και $x=4$.

(ii)

$2^x\leqslant x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\leqslant \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\leqslant 2\ln x\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\geqslant\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+1\geqslant\frac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\geqslant\frac{\ln 2}{2}+1$

Αν $x\in(0,e]$, $f(x)\geqslant\frac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\geqslant f(2)\overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow}x\geqslant 2$ άρα $2\leqslant x\leqslant e$

Αν $x\in[e,+\infty)$, $f(x)\geqslant\frac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\geqslant f(4)\overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow}x\leqslant 4$ άρα $e\leqslant x\leqslant 4$

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in[2,4]$

Εναλλακτικά : Η εξίσωση $f(x)=\frac{\ln 2}{2}+1$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 4 άρα η συνάρτηση $h(x)=f(x)-\frac{\ln 2}{2}+1$ θα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $[2,4]$ με εξαίρεση το 2 και το 4 όπου κάνει μηδέν.

$h(3)=\frac{\ln 3}{3}+1-\frac{\ln 2}{2}-1=\frac{2\ln 3-3\ln 2}{6}=\frac{\ln 9-\ln 8}{6}>0$ και λόγω διατήρησης πρόσημου ισχύει $h(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in[2,4]$ οπότε $f(x)\geqslant\frac{\ln 2}{2}-1$ όταν $x\in[2,4]$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^{2x}}\right|e^x dx$

Θέτουμε $e^x=u\Rightarrow e^x dx=du$

Για $x=-\ln 2$ έχουμε $u=\frac{1}{2}$ ενώ για $x=0$ έχουμε $u=1$

Άρα $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}\right|du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)\cdot f'(u)|du$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

Η f μηδενίζεται στο $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα αν $\frac{1}{2}<x<x_0$ τότε λόγω του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)<0$

Άρα αν $x_0<x<1$ τότε λόγω του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)>0$
Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}-f'(x)\cdot f(x)dx+\int_{x_0}^{1}f(x)\cdot f'(x)dx=\left[-\frac{f^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{x_0}^{1}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2}$$

Άρα $E=\dfrac{\ln^2\left(\frac{e}{4}\right)+1}{2}$, αφού ισχύει $f(x_0)=0$.

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές