ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 145 σχολικού βιβλίου.

Α2. Σελίδα 185 σχολικού βιβλίου.

Α3. Σωστή απάντηση η **(δ)**

Α4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η σύνθεση της g με την h είναι η $h\circ g$, επομένως

$$A_{h\circ g}=\{x\in A_g \ \text{ και } \ g(x)\in A_h\}=\{x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ e^x\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ x\neq 0\}$$

Άρα $A_{h\circ g}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $(h\circ g)(x)=h(g(x))=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

Επομένως $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}, x\neq 0$

Β2.(i) Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 0$ με

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1)-e^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}}{(e^x-1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}<0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=(0,+\infty)$

Η f συνεχής στο $A_1=(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα.

Οπότε: $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-\infty,0)$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{e^x-1}=-\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x-1\right)=0$ και για $x<0$ ισχύει $e^x-1<0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{0}{0-1}=0$

Η f συνεχής στο $A_2=(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα.

Οπότε: $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=(1,+\infty)$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}=+\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x-1\right)=0$ και για $x>0$ ισχύει $e^x-1>0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

Άρα $f(A)=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

(ii) Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1,\alpha]$ άρα υπάρχει $\xi\in(1,\alpha)$ ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}\Leftrightarrow-\frac{e^\xi}{\left(e^\xi-1\right)^2}=\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}\Leftrightarrow\left(f(\alpha)-f(1)\right)\left(e^\xi-1\right)^2=(1-\alpha)e^\xi$$

Β3. Για να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφεται θα αποδείξουμε ότι είναι $1-1$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με

$$\boxed{f(x_1)=f(x_2)} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} \Leftrightarrow e^{x_1}\left(e^{x_2}-1\right)=e^{x_2}\left(e^{x_1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1}e^{x_2}-e^{x_1}=e^{x_2}e^{x_1}-e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1}=-e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Leftrightarrow \boxed{x_1=x_2}$$

Επομένως η f είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται.

Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης .

Άρα η εξίσωση $f(x)=y$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $y \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x-1}=y \Leftrightarrow e^x=ye^x-y \Leftrightarrow ye^x-e^x=y \Leftrightarrow e^x(y-1)=y$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y}{y-1} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right), x \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

Β4. Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\,\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right]$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Άρα $\left|f(x)\,\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right|\le|f(x)|\cdot 1$

Άρα $\left|f(x)\,\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right|\le|f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)|\le f(x)\,\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)\le|f(x)|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to-\infty}-|f(x)|=0$ από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\,\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right]=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το όριο $2\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(x) - 2x\ln x - x^2 + 4x + 3$ άρα είναι πραγματικός αριθμός, οπότε θεωρούμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = k \in \mathbb{R}$ ***(1)***

Επομένως $f(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x - 3 + 2k$

- $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-2x) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\ln x + x^2 - 4x - 3 + 2k\right) = -3 + 2k$

Λόγω της ***(1)*** έχουμε $-3 + 2k = k \Leftrightarrow k = 3$

Για $k = 3$ έχουμε $f(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$

Γ2.

Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = 2\ln x + 2x - 2$ και $f''(x) = \dfrac{2}{x} + 2 > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Αφού η f είναι κυρτή η f' θα είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1) = 0$ επομένως η $x = 1$ είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$

Το πρόσημο της f' θα βρεθεί από την μονοτονία της.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1$ ενώ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Στη θέση $x = 1$ έχει (ολικό) ελάχιστο το $f(1) = 0$

Εξήγηση $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$f(1)=0$

Άρα $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει **μόνο** για $x=1$

Γ3.(i) Για να βρούμε το κοινό σημείο των g,h θα λύσουμε την εξίσωση

$$g(x)=h(x) \text{ με } x\in Ag\cap A_h=(0,+\infty)$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow 2x\ln x+x^2-x+3=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει **μοναδική** λύση την $x=1$διότι η f στη θέση $x=1$ έχει (ολικό) ελάχιστο το 0

Άρα το κοινό σημείο των συναρτήσεων g και h είναι το σημείο $M(1,0)$ δηλαδή $g(1)=h(1)$

Επίσης $g'(x)=\ln x+1$ οπότε $g'(1)=1$ και $h'(x)=-x+2$ οπότε $h'(1)=1$

Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο .

(ii) Επειδή οι συναρτήσεις g και h έχουν ένα κοινό σημείο το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^2|g(x)-h(x)|dx=\int_1^2\left|x\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right|dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left|2x\ln x+x^2-4x+3\right|dx=\frac{1}{2}\int_1^2|f(x)|dx$$

Όμως $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ άρα

$$E=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(2x\ln x+x^2-4x+3\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_1^2(2x\ln x)dx+\int_1^2\left(x^2-4x+3\right)dx\right)=2\ln 2-\frac{13}{12}$$

- $$I_1=\int_1^2 2x\ln x=\int_1^2\left(x^2\right)'\ln x=\left[x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2 x^2\frac{1}{x}dx=\left[x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2 xdx=$$

$$=\left[x^2\ln x\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=4\ln 2-\frac{3}{2}$$

- $I_2=\int_1^2\left(x^2-4x+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2=\frac{8}{3}-8+6-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=-\frac{2}{3}$

Γ4.

$\ln\left(\alpha^{2\alpha}\cdot\beta^{2\beta}\right)+(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=2\Leftrightarrow \ln\alpha^{2\alpha}+\ln\beta^{2\beta}=-(\alpha-2)^2-(\beta-2)^2+2$

$\Leftrightarrow 2\alpha\ln\alpha+2\beta\ln\beta=-\alpha^2+4\alpha-4-\beta^2+4\beta-4+2$

$\Leftrightarrow 2\alpha\ln\alpha+2\beta\ln\beta+\alpha^2-4\alpha+3+\beta^2-4\beta+3=0\Leftrightarrow \boxed{f(\alpha)+f(\beta)=0}$

Η τελευταία ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=1$

Διότι $f(\alpha)+f(\beta)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=-f(\beta)$,δηλαδή οι αριθμοί είναι είτε και οι δύο μηδέν είτε αντίθετοι ,το τελευταίο δεν ισχύει αφού

$f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ και ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

- $f(\alpha)\geq 0$ για κάθε $\alpha>0$ και $f(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=1$
- $f(\beta)\geq 0$ για κάθε $\beta>0$ και $f(\beta)=0\Leftrightarrow\beta=1$

Άρα $f(\alpha)+f(\beta)\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta>0$

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\varphi(x)-(x-4)\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\ln x+x^2-4x+3-2x\ln x}{x}-x+4\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x-3}{x}-x+4\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x-3-x^2+4x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{x}\right)=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-g(x)-(k+2)x-e^k=e^{x+k}+x^2+x-(k+2)x-e^k$$

Για την οποία ισχύει $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δηλαδή $h(x)\geq h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $h(0)=0$

Άρα η h στο $x=0$ έχει ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό άρα από Θεώρημα Fermat

Ισχύει $h'(0)=0$

Παραγωγίζοντας την h έχουμε $h'(x)=e^{x+k}+2x+1-(k+2)$

$h'(0)=0\Leftrightarrow e^k+1-(k+2)=0\Leftrightarrow e^k-k+1=0\Leftrightarrow k=0$ διότι : $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Δ2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\ \ (1)$$

Ισχύει : $f(0)=1,\ f'(x)=e^x$ άρα $f'(0)=1$

Αντικαθιστώντας τα $f(0)$ και $f'(0)$ στην (1) έχουμε : $y-1=x\Leftrightarrow \boxed{y=x+1}$

Η g έχει επίσης πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Για να εφάπτεται η $y=x+1$ στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g αρκεί το σύστημα : $\begin{cases} g'(x_0)=1 \\ g(x_0)=x_0+1 \end{cases}$ να έχει λύση .

Πράγματι : $\begin{cases} -2x_0-1=1 \\ -x_0^{\,2}-x_0=x_0+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=-1 \\ x_0^{\,2}+2x_0+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x_0=-1$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο της $B(-1,g(-1))$ δηλαδή στο σημείο $B(-1,0)$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\left(\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx\right)x^3-\left(e^x-e\right)\left(g(\alpha)-f(\beta)\right)$

Η φ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$

- $\varphi(0)=-(1-e)\left(g(\alpha)-f(\beta)\right)=(e-1)\left(g(\alpha)-f(\beta)\right)<0$

Διότι: $e-1>0$ και $f(\beta)=e^{\beta}>0\Leftrightarrow -f(\beta)=-e^{\beta}<0$

Επίσης :

$g(\alpha)=-\alpha^2-\alpha=-\alpha(\alpha+1)<0$ αφού $-1<\alpha<\beta<0$ άρα $\alpha+1>0$ και $-\alpha<0$

Άρα $g(\alpha)-f(\beta)<0$

- $\varphi(1)=\left(\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx\right)>0$

Διότι Η συνάρτηση $g(x)=-x^2-x$ παίρνει θετικές τιμές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, το ίδιο και η συνάρτηση $f(x)=e^x$ άρα $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική με

$$\varphi'(x)=3x^2\left(\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx\right)$$

και $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα στο διάστημα αυτό είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Δ4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g\left(f(\alpha)\right)\cdot ημx}{xf(x)-x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{g\left(f(\alpha)\right)\cdot ημx}{x\left(f(x)-x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{ημx}{x}\right)\cdot\frac{1}{f(x)-x-1}\cdot g\left(f(\alpha)\right)\right]=-\infty$$

Διότι : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$, $f(\alpha)=e^{\alpha}$ άρα $g\left(f(\alpha)\right)=-e^{2\alpha}-e^{\alpha}<0$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής

Οπότε για τιμές του x πολύ κοντά στο 0 ισχύει $f(x)>x+1\Leftrightarrow f(x)-x-1>0$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-x-1\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)-x-1}=+\infty$