ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 83

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 89

Α3. ΣΩΣΤΟ, εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ.126.

Α4. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε :

$\overrightarrow{AB}=\left(\chi_B-\chi_A\ ,\ \psi_B-\psi_A\right)=(5-2\ ,\ 3-3)=(3,0)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\chi_\Gamma-\chi_A\ ,\ \psi_\Gamma-\psi_A\right)=(2-2\ ,\ 6-3)=(0,3)$

Συνεπώς $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=(3,0)\cdot(0,3)=3\cdot 0+0\cdot 3=0$, άρα $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$

Β2. Έχουμε : $\overrightarrow{BA}=(-3,0)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\chi_\Gamma-\chi_B\,,\,\psi_\Gamma-\psi_B\right)=(2-5\,,\,6-3)=(-3,3)$

Επομένως $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=(-3,0)\cdot(-3,3)=(-3)\cdot(-3)+0\cdot 3=9+0=9$

Επίσης έχουμε :

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3$ και

$|\overrightarrow{B\Gamma}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\sqrt{9}\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Άρα : $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{B\Gamma}|}=\dfrac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως : $\widehat{AB\Gamma}=\dfrac{\pi}{4}$

Ομοίως έχουμε : $\overrightarrow{\Gamma A}=(0,-3)$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=(3,-3)$

με $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=(0,-3)\cdot(3,-3)=3\cdot 0+(-3)\cdot(-3)=9$

όπου $|\overrightarrow{\Gamma A}|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ και

$|\overrightarrow{\Gamma B}|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Άρα : $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{\Gamma B}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{|\overrightarrow{\Gamma A}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma B}|}=\dfrac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως : $\widehat{A\Gamma B}=\dfrac{\pi}{4}$

Β3. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Είναι :

$$\chi_M=\frac{\chi_B+\chi_\Gamma}{2}=\frac{5+2}{2}=\frac{7}{2} \quad \text{και} \quad \psi_M=\frac{\psi_B+\psi_\Gamma}{2}=\frac{6+3}{2}=\frac{9}{2}$$

Έχουμε επίσης : $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{\psi_\Gamma-\psi_B}{\chi_\Gamma-\chi_B}=\dfrac{6-3}{2-5}=\dfrac{3}{-3}=-1$

Όμως η μεσοκάθετος (ε) της ΒΓ είναι κάθετη στη ΒΓ άρα : $\lambda_\varepsilon=\dfrac{-1}{\lambda_{B\Gamma}}=\dfrac{-1}{-1}=1$

Τελικά η μεσοκάθετος (ε) της ΒΓ έχει εξίσωση :

$$\psi-\psi_M=\lambda_\varepsilon\left(\chi-\chi_M\right)\Leftrightarrow\psi-\frac{9}{2}=1\cdot\left(\chi-\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow\psi-\frac{9}{2}=\chi-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\psi=\chi+\frac{9}{2}-\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow\psi=\chi+\frac{2}{2}\Leftrightarrow\psi=\chi+1$$

Β4. Έχουμε βρει ότι το μέσο Μ της ΒΓ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$ που είναι και το κέντρο του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου θα είναι :

$$\rho=\frac{(B\Gamma)}{2}=\frac{\sqrt{\left(\chi_{\Gamma}-\chi_{B}\right)^{2}+\left(\psi_{\Gamma}-\psi_{B}\right)^{2}}}{2}=\frac{\sqrt{(2-5)^{2}+(6-3)^{2}}}{2}=\frac{\sqrt{(-3)^{2}+3^{2}}}{2}=\frac{\sqrt{9+9}}{2}=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Άρα ο κύκλος θα έχει εξίσωση :

$$\left(\chi-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\psi-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\chi-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\psi-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

Θέτω $\chi=2$ και $\psi=3$, κι έχω :

$$\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{2}-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{18}{4}=\frac{9}{2}$, που ισχύει επομένως το σημείο Α ανήκει στον κύκλο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. (ι) . Έχουμε Α= -8 , Β=0 και Γ=8. Οπότε

$A^2+B^2-4\Gamma=(-8)^2+0-4\cdot 8=64-32=32>0$ άρα η C_1 παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\frac{8}{2},0)$ ή $K(4,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{16\cdot 2}}{2}=2\sqrt{2}$.

(ιι) Έχουμε $x^2-y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ οπότε η C_2 παριστάνει υπερβολή .Επιπλέον $\alpha=\beta=2$ άρα είναι και ισοσκελής. Επίσης $\gamma^2=\beta^2+\alpha^2=4+4=8$ δηλαδή $\gamma=2\sqrt{2}$ συνεπώς οι εστίες είναι τα σημεία $E(2\sqrt{2},0), E'(-2\sqrt{2},0)$.

Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$ με α=β=2, άρα $\varepsilon_1: y=x$ και $\varepsilon_2: y=-x$

Η εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Γ2. Επειδή $d(k,\varepsilon_1)=\dfrac{|4-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=\rho$ και $d(k,\varepsilon_2)=\dfrac{|4+0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=\rho$, οι ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της C_2 εφάπτονται στον κύκλο C_1.

Γ3. Έχουμε $A(2,0)$, A'(-2,0).Το σημείο Β είναι το σημείο τομής της ασύμπτωτης με θετική κλίση δηλαδή της $\varepsilon_1: y=x$ (αφού λ=1>0) και του κύκλου C_1.Με αντικατάσταση όπου $y=x$ στην εξίσωση του κύκλου έχουμε $x^2+x^2-8x+8=0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ άρα και y=2 οπότε B(2,2).

Συνεπώς

$$E=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'})\right|=\frac{1}{2}|0-8|=\frac{8}{2}=4\tau.\mu$$

Γ4. Οι εστίες της έλλειψης ταυτίζονται με τις εστίες της υπερβολής άρα $E(2\sqrt{2},0), E'(-2\sqrt{2},0)$. Επίσης ,αν ε' η εκκεντρότητα της έλλειψης τότε

$\varepsilon'=\dfrac{1}{\varepsilon}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.Συνεπώς, $\dfrac{\gamma'}{\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha'=4$ και

$\beta'=\sqrt{\alpha'^2-\gamma'^2}=\sqrt{16-8}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\frac{p}{2}=2 \Leftrightarrow p=4$.

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $C_1: y^2=8x$.

Δ2. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων είναι

$C_2: x^2+y^2=2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C_1 στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$yy_1=4(x+x_1) \Leftrightarrow 4x-yy_1+4x_1=0$.

Για να είναι εφαπτομένη και του κύκλου C_2 πρέπει

$$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|4\cdot 0-y_1\cdot 0+4x_1|}{\sqrt{4^2+y_1^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|4x_1|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+y_1^2} \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2=2(16+y_1^2) \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2=32+2y_1^2 \ .$$

Το σημείο Μ ανήκει σε αυτή άρα έχουμε ${y_1}^2=8x_1$,οπότε

$$16x_1^2-16x_1-32=0 \Leftrightarrow x_1^2-x_1-2=0 \Leftrightarrow (x_1-2)(x_1+1)=0\ .$$

Δεκτή η λύση $x_1=2$.

Για $x_1=2$ από (1) έχουμε $y_1^2=16 \Leftrightarrow y_1=4$ ή $y_1=-4$.

Οπότε τα κοινά σημεία θα είναι Μ (2,4) ή Μ΄ (2, -4)

Οι κοινές εφαπτόμενες λοιπόν θα είναι:

$\varepsilon_1: 4x-4y+8=0 \Leftrightarrow x-y+2=0$ και

$\varepsilon_2: 4x+4y+8=0 \Leftrightarrow x+y+2=0.$

Δ3. Η εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από την εστία Ε(2,0) της παραβολής έχει εξίσωση $\varepsilon: y-0=\lambda(x-2) \Leftrightarrow$

$\lambda x-y-2\lambda=0$ ή ε': x=2 .

Η ευθεία ε' με εξίσωση x=2 απορρίπτεται αφού ρ = $\sqrt{2}$ < 2 οπότε είναι εξωτερική του κύκλου .

Για να είναι η ε εφαπτόμενη του κύκλου C_2 πρέπει

$$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|-2\lambda|=\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2=2\lambda^2+2 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2=2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda=\pm 1\ .$$

Για λ=-1, έχουμε $\varepsilon_3: y - 0 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

Για λ=1, έχουμε $\varepsilon_4: y - 0 = 1(x-2) \Leftrightarrow \quad y = x - 2$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των $(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ που αποτελούν τις κορυφές Α,Β,Γ αντίστοιχα του τετράπλευρου.

Λύνουμε το σύστημα των $(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$, όπου βρίσκουμε x=0 και y=2

Οπότε Α(0,2).

Όμοια λύνουμε τα συστήματα των $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ και βρίσκουμε αντίστοιχα τα σημεία Β(-2,0), Γ(2,0) .

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 = \lambda_4$ $ά\rho\alpha$ $\varepsilon_1 // \varepsilon_4$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ $ά\rho\alpha$ $\varepsilon_2 // \varepsilon_3$

Επίσης $\lambda_1 \lambda_3 = -1$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi ώ\varsigma$ $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$.

$(AB) = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και

$(B\Gamma) = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Επομένως είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ,άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.