

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

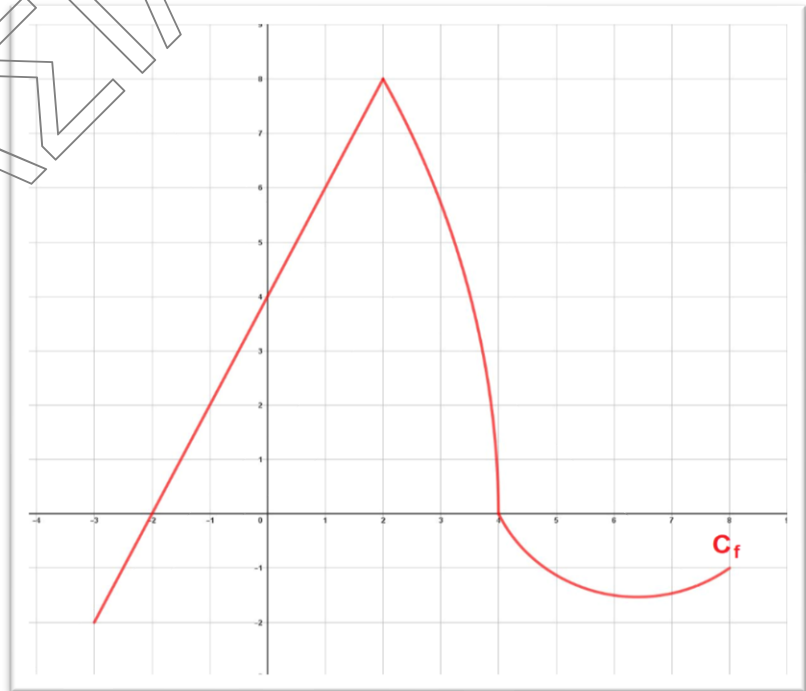
Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΑΑ1. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ να δείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Μονάδες 10

Α2. Στο διπλανό σχήμα
δίνεται η γραφική
παράσταση μιας
συνάρτησης f .

Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν σωστές ισότητες, μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα Ι σωστά συμπληρωμένο.

Στήλη Α	
1	$f(0)$
2	$f(4)$
3	$f(2)$
4	$f(8)$
5	$f(-3)$

Στήλη Β	
Α	8
Β	4
Γ	-2
Δ	-1
Ε	0

Πίνακας Ι				
1	2	3	4	5

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

β. Για κάθε $\theta \geq 0$ ισχύει $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$.

γ. Η εξίσωση $x^v = \alpha$ με v περιττό φυσικό αριθμό έχει πάντα λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

ε. Το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα xx' είναι το σημείο $N(-\alpha, \beta)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Να λύσετε τις ανισώσεις: $|x+1| \geq 2$ και $|2x-1| < 5$.

Μονάδες 8

B2. Να δείξετε ότι το σύνολο των κοινών λύσεων των παραπάνω ανισώσεων είναι $[1,3)$.

Μονάδες 5

B3. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω που ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο παραπάνω ανισώσεων. Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $|a_1 + 1| = 3$ και $\omega^3 = 8$ να βρείτε:

i) Τον πρώτο όρο a_1 και την διαφορά ω .

Μονάδες 6

ii) Τον δέκατο όρο της προόδου καθώς και το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της.

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} - k$, με $k \in \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να δείξετε ότι $k=1$.

Μονάδες 8

Γ2. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $B = \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(2)+2}$ είναι ίση με $\sqrt{3}$.

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $|x-1| + f(x) = -1$.

Μονάδες 6

- Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση Β και διέρχεται από το σημείο $M(B,1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda - 1) \cdot x + \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

Μονάδες 5

- Δ2. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) τότε:

i) Να βρείτε τις παραστάσεις $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

ii) Να δείξετε ότι ισχύει $4\lambda + S^2 - 4(P - x^2 + x\lambda) \geq -4(x-1)(\lambda+1) + 4$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

- Δ3. Για $\lambda = 5$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) γράφεται $x^2 - 9x + 18 = 0$.

Μονάδες 2

ii) Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 9x + 18 < 0$.

Μονάδες 3

iii) Αν $|\alpha| < 3$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $K = \alpha^2 - 9 \cdot |\alpha| + 18$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5