

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ. 90.

Α2.

Πίνακας 1				
1	2	3	4	5
Β	Ε	Α	Δ	Γ

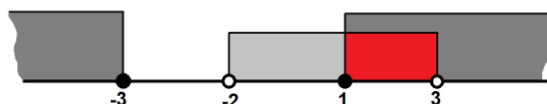
- Α3. α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|x+1| \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2-1 \Leftrightarrow x \geq 1$

ή $x+1 \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -2-1 \Leftrightarrow x \leq -3$

$|2x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \stackrel{+1}{\Leftrightarrow} -4 < 2x < 6 \Leftrightarrow -2 < x < 3$

Β2. Έχουμε: $x \geq 1$ ή $x \leq -3$ και $-2 < x < 3$:

Οι κοινές λύσεις είναι: $x \in [1, 3)$

B3. i) $\alpha_1 \in [1, 3) \Leftrightarrow 1 \leq \alpha_1 < 3$ και $\omega \in [1, 3) \Leftrightarrow 1 \leq \omega < 3$

$|\alpha_1 + 1| = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 + 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 3 - 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$ δεκτή.

ή $\alpha_1 + 1 = -3 \Leftrightarrow \alpha_1 = -3 - 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = -4$ απορρίπτεται.

$\omega^3 = 8 \Leftrightarrow \omega = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \omega = 2$ δεκτή.

ii) $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 2 + 9 \cdot 2 = 2 + 18 = 20$.

$S_{10} = \frac{10}{2} [2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 5(2 \cdot 2 + 9 \cdot 2) = 5(4 + 18) = 5 \cdot 22 = 110$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει:

$-x^2 + 6x - 5 \geq 0$

$\Delta = 6^2 - 4(-1)(-5) = 36 - 20 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-6+4}{-2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow x_1 = 1$.

ή $x_2 = \frac{-6-4}{-2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x_2 = 5$.

Πρόσημο του τριωνόμου:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$-x^2 + 6x - 5$	—	0	+	0
	—	+	—	—

Άρα $x \in [1, 5]$ οπότε $A_f = [1, 5]$.

$f(3) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-9 + 18 - 5} - \kappa = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \kappa = 1 \Leftrightarrow 2 - \kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Γ2. Έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} - 1$$

$$f(2) = \sqrt{-4 + 12 - 5} - 1 = \sqrt{3} - 1.$$

$$B = \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(2)+2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Γ3. Έχουμε:

$$|x-1| + f(x) = -1 \Leftrightarrow |x-1| + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} - 1 = -1 \Leftrightarrow |x-1| + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} = 0$$

ως άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων ίσο με μηδέν θα ισχύει:

- $|x-1| = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και
- $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$.

Κοινή τιμή η $x = 1$ που είναι δεκτή διότι $x \in [1, 5]$.

Γ4. Έστω ότι η εξίσωση της ευθείας είναι $\varepsilon: y = Bx + \beta$ με $B = \sqrt{3}$.

Άρα $\varepsilon: y = \sqrt{3} \cdot x + \beta$. Η ε διέρχεται από το σημείο $\Gamma(\sqrt{3}, 1)$ οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Γ θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Άρα για $x = \sqrt{3}$ και $y = 1$ έχουμε $1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \beta \Leftrightarrow 1 = 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$.

Οπότε $\varepsilon: y = \sqrt{3} \cdot x - 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε:

$$\Delta = [-(2\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2) = (2\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 9.$$

Αφού $\Delta > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

Δ2. i) $S = x_1 + x_2 = -\frac{-(2\lambda - 1)}{1} = 2\lambda - 1$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{1} = \lambda^2 - \lambda - 2$.

ii) Έχουμε:

$$4\lambda + S^2 - 4(P - x^2 + x\lambda) \geq -4(x-1)(\lambda+1) + 4 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + (2\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda - 2 - x^2 + x\lambda) \geq -4(x-1)(\lambda+1) + 4 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 8 + 4x^2 - 4x\lambda \geq -4(x\lambda + x - \lambda - 1) + 4 \Leftrightarrow$$

$$9 + 4\lambda + 4x^2 - 4x\lambda \geq -4x\lambda - 4x + 4\lambda + 4 + 4 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Δ3. i) Για $\lambda = 5$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (10-1) \cdot x + 5^2 - 5 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 25 - 5 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0.$$

ii) $x^2 - 9x + 18 < 0$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{9+3}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{12}{2} \Leftrightarrow x_1 = 6.$$

$$\text{ή } x_2 = \frac{9-3}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x_2 = 3.$$

Πρόσημο του τριωνύμου:

x	$-\infty$	3	6	$+\infty$	
$x^2 - 9x + 18$	+	0	-	0	+

Άρα $x \in (3, 6)$.

iii) Έχουμε: $K = \alpha^2 - 9 \cdot |\alpha| + 18 \Leftrightarrow K = |\alpha|^2 - 9 \cdot |\alpha| + 18 \Leftrightarrow K = (|\alpha| - 3)(|\alpha| - 6)$

Όμως:

$$|\alpha| < 3 \Leftrightarrow |\alpha| - 3 < 0 \text{ και}$$

$$|\alpha| < 3 \Leftrightarrow |\alpha| - 6 < 3 - 6 \Leftrightarrow |\alpha| - 6 < -3 \text{ δηλαδή } |\alpha| - 6 < 0.$$

Άρα $K > 0$ ως γινόμενο αρνητικών όρων.