ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 106

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 23

Α4. **(α)** Λάθος **(β)** Λάθος **(γ)** Σωστό **(δ)** Λάθος **(ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{h\circ g}=\{x\in Ag \text{ και } g(x)\in A_h\}=\left\{-1<x<1 \text{ και } \dfrac{1-x}{1+x}>0\right\}$

$$\frac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$$

Άρα $A_{h\circ g}=(-1,1)\neq\varnothing$ επομένως $(h\circ g)(x)=h(g(x))=\ln\dfrac{1-x}{1+x},x\in(-1,1)$

Β2.

(α) Για να δείξουμε ότι η $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x},x\in(-1,1)$ αντιστρέφεται θα αποδείξουμε ότι είναι 1-1.

Έστω $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$\ln\frac{1-x_1}{1+x_1} = \ln\frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow (1-x_1)(1+x_2) = (1+x_1)(1-x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+x_2-x_1-x_1\cdot x_2 = 1-x_2+x_1-x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

(β) Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y\ , -1 < x < 1$ ως προς x για να βρούμε την αντίστροφη της f .

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow 1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow 1-e^y = x + xe^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-e^y = x(1+e^y) \Leftrightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}, y \in \mathbb{R}$$

αφού $-1 < \frac{1-e^y}{1+e^y} < 1 \Leftrightarrow -1-e^y < 1-e^y < 1+e^y$ το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$

Β3. Η εξίσωση εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο : $\boxed{y - f^{-1}(0) = \left(f^{-1}\right)'(0)(x-0)}$

Όπου $f^{-1}(0) = 0$ ενώ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ και $\left(f^{-1}\right)'(0) = -\frac{1}{2}$

Άρα $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

Β4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η $f(x)=\begin{cases} e^x+\alpha &, \quad x>0 \\ x^3+\beta x+\beta &, \quad x\le 0 \end{cases}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής επομένως : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ άρα $\boxed{1+\alpha=\beta}$

Από την παραγωγισιμότητα της f προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3+\beta x+\beta-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3+\beta x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x\left(x^2+\beta\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2+\beta\right)=\beta$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+\alpha-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+\beta-1-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Διότι το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης e^x στο σημείο $x=0$

Άρα $\beta=1$ και από την σχέση $\boxed{1+\alpha=\beta}$ παίρνουμε ότι $\alpha=0$

Γ2. Αφού το σημείο $M(x,y), x<0$ κινείται πάνω στην C_f ισχύει

$$y(t)=x^3(t)+x(t)+1$$

Άρα $y'(t)=3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)$ για $t=t_0$ ισχύει $x(t_0)=-1$ και $y(t_0)=-1$

Επομένως : $y'(t_0)=3\cdot x'(t_0)+x'(t_0)\Leftrightarrow \boxed{y'(t_0)=4\cdot x'(t_0)}$

Γ3. (i) Η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι η $e^x=\frac{1}{x}$, αφού θέλουμε να έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\rho\in(0,+\infty)$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=e^x-\frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$\begin{cases} x_1<x_2 \\ x_1<x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}-\frac{1}{x_1}<e^{x_2}-\frac{1}{x_2} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$g(A)=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της g άρα υπάρχει $\rho\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)-\frac{1}{\rho}=0\Leftrightarrow f(\rho)=\frac{1}{\rho}\Leftrightarrow \boxed{e^{\rho}=\frac{1}{\rho}}$, το ρ μοναδικό αφού η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

(ii) Έστω $A(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f με $x_0>0$, επομένως κινείται στο κλάδο $f(x)=e^x, x>0$

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο Α είναι : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M(-1,1)$ **όταν**

$$-1-f(x_0)=f'(x_0)(-1-x_0)\Leftrightarrow$$

$$-1-e^{x_0}=e^{x_0}(-1-x_0)\Leftrightarrow -1-e^{x_0}=-e^{x_0}-e^{x_0}x_0\Leftrightarrow -1=-e^{x_0}x_0\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=e^{x_0}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει **μόνο** για το $x_0=\rho, \rho>0$, άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη .

Γ4.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{f(x)}\cdot ημf(x)}{f(-x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^3+x+1}\cdot ημ(x^3+x+1)}{e^{-x}-2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{-x}-2}\cdot e^{x^3+x+1}\cdot ημ(x^3+x+1)\right)$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}-2}=0$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}}=+\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ και $e^{x}>0$

Θέτουμε $u=x^3+x+1$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ $\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x^3+x+1}}{e^{-x}-2}\cdot ημ(x^3+x+1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)\cdot ημ(x^3+x+1)\right)$

Όπου $h(x)=\frac{e^{x^3+x+1}}{e^{-x}-2}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$

$$\left|h(x)\cdot ημ(x^3+x+1)\right|\le|h(x)|\cdot\left|ημ(x^3+x+1)\right|\le|h(x)|$$

Άρα $-|h(x)|\le h(x)\cdot ημ(x^3+x+1)\le|h(x)|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{f(x)}\cdot ημf(x)}{f(-x)+2}=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in[0,4]$ έχουμε

$$f^2(x)+2f(x)\sqrt{4-x}=2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\sqrt{4-x}+\left(\sqrt{4-x}\right)^2=2(x-2)+\left(\sqrt{4-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(f(x)+\sqrt{4-x}\right)^2=2x-4+4-x\Leftrightarrow\left(f(x)+\sqrt{4-x}\right)^2=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|f(x)+\sqrt{4-x}\right|=\sqrt{x}\ \mathbf{(1)}$$

Θέτουμε $φ(x)=f(x)+\sqrt{4-x}$, με $x\in[0,4]$

Βρίσκουμε τις ρίζες της $φ(x)$

$$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow |\varphi(x)|=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$$

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ μηδενίζεται στο $x=0$ και επειδή είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $(0,4]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,3]$ άρα $f(1)\cdot f(3)<0$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα $f(1)<f(3)$ επομένως $f(1)<0$ ενώ $f(3)>0$

Επομένως $\varphi(3)=f(3)+\sqrt{4-3}=f(3)+1>0$ και λόγω διατήρησης προσήμου $\varphi(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,4]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα από την σχέση **(1)** προκύπτει $f(x)+\sqrt{4-x}=\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}$, $A=[0,4]$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,4]$ άρα $f(A)=[f(0),f(4)]=[-2,2]$

Δ2. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x) \Leftrightarrow h(x)=f(x)-e^{-x}, x\in[0,4]$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $A=[0,4]$ και θα βρούμε το πρόσημό της .

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$

$$x_1<x_2 \overset{f\ \text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2) \quad (2)$$

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2),(3) προκύπτει $h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα .

Η h συνεχής στο $[0,4]$ και $h(0)\cdot h(4)<0$ αφού $h(0)=-3<0$ και $h(4)=2-e^{-4}>0$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$

Το x_0 μοναδικό αφού η h γνησίως αύξουσα.

Για την σχετική τους θέση έχουμε :

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0 \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow h(x)>h(x_0) \Leftrightarrow x>x_0$$

Άρα για κάθε $x\in(x_0,4]$ η C_f πάνω από την C_g

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow h(x)<0 \Leftrightarrow h(x)<h(x_0) \Leftrightarrow x<x_0$$

Άρα για κάθε $x\in[0,x_0)$ η C_f κάτω από την C_g

Δ3. $f(e^{-x})\left[\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{4-f(x)}\right)\right]<2f(x)-4$, ισχύει $\sqrt{f(x)}+\sqrt{4-f(x)}>0$ άρα

$$f(e^{-x})<\frac{2f(x)-4}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{4-f(x)}\right)}$$

και επειδή για κάθε $x\in(2,4)$ $\sqrt{f(x)}-\sqrt{4-f(x)}\neq 0$ έχουμε

$$f(e^{-x})<\frac{(2f(x)-4)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{4-f(x)}\right)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{4-f(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{4-f(x)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(e^{-x})<\frac{(2f(x)-4)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{4-f(x)}\right)}{2f(x)-4}$$

Δηλαδή

$$f\left(e^{-x}\right)<\sqrt{f(x)}-\sqrt{4-f(x)} \Leftrightarrow f\left(e^{-x}\right)<f(f(x)) \Leftrightarrow e^{-x}<f(x) \Leftrightarrow g(x)<f(x) \Leftrightarrow x>x_0$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(x_0,4)$ με $x_0>2$ αφού $h(2)<0$, $h(x_0)=0$.

και η $h(x)$ γνησίως αύξουσα .

Δ4. Ο παρονομαστής του κλάσματος τείνει στο μηδέν αφού

$$f(x_0)=e^{-x_0} \Leftrightarrow f(x_0)=\frac{1}{e^{x_0}} \Leftrightarrow f(x_0)e^{x_0}=1$$

και επειδή $x>x_0$ ισχύει από το **Δ2.** $f(x)>e^{-x} \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{e^x}>0 \Leftrightarrow f(x)e^x-1>0$

Το πρόσημο του ορίου του αριθμητή είναι: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f^{-1}(x-1)=f^{-1}(x_0-1)>0$ διότι

$f^{-1}(x_0-1)>0 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x_0-1)\right)>f(0) \Leftrightarrow x_0-1>-2 \Leftrightarrow x_0>-1$ το οποίο ισχύει.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f^{-1}(x-1)}{e^x f(x)-1}=+\infty$