ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 43

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 34

Α3. ΛΑΘΟΣ, τα κάθετα διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με 0 χωρίς να είναι οπωσδήποτε κάποιο από τα δύο το μηδενικό διάνυσμα.

Α4. **α)** ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=3\sqrt{2}\cdot 2\cdot συν\frac{\pi}{4}=6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6$

Έχουμε επίσης :

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^{\,2}-3\vec{\alpha}\vec{\beta}=2|\vec{\alpha}|^2-3\vec{\alpha}\vec{\beta}=2\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2-3\cdot 6=36-18=18$$

Β2. Υπολογίζουμε το μέτρο του $\vec{\gamma}$ ως εξής :

$$|\vec{\gamma}|^2=\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^{\,2}-12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^{\,2}=4|\vec{\alpha}|^2-12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9|\vec{\beta}|^2=4\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2-12\cdot 6+9\cdot 2^2=36$$

Επομένως $|\vec{\gamma}|=\sqrt{36}=6$.

Επίσης έχουμε :

$$συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|} = \frac{18}{6\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Συνεπώς $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{4}$

Β3. Αρχικά έχουμε :

$$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = 2(3,3) - 3(2,0) = (6,6) - (6,0) = (0,6).$$

Στη συνέχεια αναζητούμε $\kappa, \lambda \in R$ ώστε $\kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} = \vec{\delta}$.

Είναι :

$$\kappa(2,0) + \lambda(0,6) = (8,18)$$

$$(2\kappa,0) + (0,6\lambda) = (8,18)$$

$$(2\kappa,6\lambda) = (8,18).$$

Άρα $2\kappa = 8 \Leftrightarrow \kappa = 4$ και $6\lambda = 18 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

Β4. Εφόσον $\vec{w} // \vec{\alpha}$, θα υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε

$$\vec{w} = \lambda\vec{\alpha} = \lambda(3,3) = (3\lambda, 3\lambda)$$

Θα είναι :

$$\vec{w}\vec{\alpha} = 36 \Leftrightarrow (3\lambda,3\lambda)\cdot(3,3) = 36 \Leftrightarrow 9\lambda + 9\lambda = 36 \Leftrightarrow 18\lambda = 36 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

άρα $\vec{w}$=(6,6).

Β τρόπος : Έχουμε

$$\vec{w}\vec{\alpha} = 36 \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = 36 \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha}^2 = 36 \Leftrightarrow \lambda|\vec{\alpha}|^2 = 36 \Leftrightarrow \lambda(3\sqrt{2})^2 = 36 \Leftrightarrow 18\lambda = 36 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

άρα $\vec{w}$=(6,6).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α, άρα οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της.

Έχουμε:

$$3\lambda - 7 = (3\lambda - 1)\cdot 1 - 5\lambda - 1 \Leftrightarrow$$

$3\lambda - 7 = 3\lambda - 1 - 5\lambda - 1 \Leftrightarrow$

$5\lambda = 5 \Leftrightarrow$

$\lambda = 1.$

Γ2. Έστω δ: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ η εξίσωση της ευθείας.

Οι ευθείες ε και δ είναι κάθετες, άρα

$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow 2 \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{1}{2}$

Η ευθεία δ τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,4)

Οπότε η εξίσωση της δ είναι: $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4.$

Γ3. Το σημείο τομής Γ των ευθειών ε και δ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεών τους.

$\begin{Bmatrix} y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \\ y = 2x - 6 \end{Bmatrix}$ τα πρώτα μέλη είναι ίσα άρα

$-\frac{1}{2} \cdot x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow -x + 8 = 4x - 12 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow$

$x = 4$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση έχουμε y=2

Άρα το σημείο τομής είναι Γ(4,2).

Το μέσο Μ του ΒΓ έχει συντεταγμένες

$\mathrm{M}\left(\frac{X_B + X_\Gamma}{2}, \frac{Y_B + Y_\Gamma}{2}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = M(2,3).$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ είναι

$\lambda_{AM} = \frac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A} = \frac{3+4}{2-1} \Leftrightarrow \lambda_{AM} = 7.$

Οπότε η εξίσωση της ΑΜ θα είναι

$y - 3 = 7(x - 2) \Leftrightarrow y = 7x - 11.$

Γ4. α) $\overrightarrow{\Gamma B} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} = (X_B - X_\Gamma, Y_B - Y_\Gamma) \cdot (X_A - X_\Gamma, Y_A - Y_\Gamma) =$

$(-4,2) \cdot (-3,-6) = 12 - 12 = 0.$

β) Το μέσο Ν του ΑΒ θα έχει συντεταγμένες

$N\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}\right) = N\left(\frac{1+0}{2}, \frac{-4+4}{2}\right) = N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΜΝ είναι:

$\lambda_{MN} = \frac{Y_N - Y_M}{X_N - X_M} = \frac{0-3}{\frac{1}{2}-2} = 3$

και της ευθείας ΑΓ είναι:

$\lambda_{A\Gamma} = \frac{Y_\Gamma - Y_A}{X_\Gamma - X_A} = \frac{2+4}{4-1} = 3.$

Άρα ΜΝ//ΑΓ.

Επίσης από το προηγούμενο ερώτημα, το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΜΝ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

2ος τρόπος επίλυσης

Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΓΒ και ΑΒ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΓΒ, άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΓ. Οπότε το τετράπλευρο ΑΓΜΝ είναι τραπέζιο και λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, η γωνία Γ είναι ορθή, άρα ορθογώνιο τραπέζιο.

3ος τρόπος επίλυσης

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = \left(\frac{1}{2} - 2, 0 - 3\right) \cdot (-4,2) = \left(-\frac{3}{2}, -3\right) \cdot (-4,2) = 6 - 6 = 0$$

Άρα $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Gamma B} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε ΜΝ // ΑΓ δηλαδή το ΑΓΜΝ ορθογώνιο τραπέζιο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| = -1$.Για την εύρεση της εξίσωσης της ΒΝ έχουμε :

$$x - 2|\vec{\alpha}|^2 y + 2\vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2|\vec{\beta}|^2 + (-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$$

Επίσης για την εξίσωση της ΓΜ : $y = -\vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow y = -(-1) \Leftrightarrow y = 1$.

Δ2.i. Αφού το σημείο Μ είναι σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 1$ έχει τεταγμένη ίση με 1 άρα $M(x_M, 1)$. Επειδή Μ μέσο του ΑΒ ,αν $B(x_B, y_B)$,ισχύει $1 = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow y_B = 0$. Συνεπώς $B(x_B, 0)$.Επιπλέον το Β είναι σημείο της διαμέσου ΒΝ οπότε $x_B - 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_B = -1$. Δηλαδή $x_M = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$ άρα $M(0,1)$.

ιι. Επειδή Γ είναι σημείο της διαμέσου ΓΜ ,αν Γ($x_Γ$, $y_Γ$), ισχύει $y_Γ=1$ οπότε για το μέσο Ν((x_N, y_N) της ΑΒ έχουμε $y_N = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$.Επίσης το σημείο Ν είναι σημείο της διαμέσου ΒΝ άρα $x_N - 2\cdot\frac{3}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x_N = 2$ οπότε Ν(2, $\frac{3}{2}$).

Δ3.

Αφού Β(-1,0) , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{2-0}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$ επομένως η εξίσωση της ΑΒ είναι $y - 0 = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$.

Επειδή Ν μέσο του ΑΓ ισχύει $x_N = \frac{x_Γ + x_A}{2} \Leftrightarrow x_Γ = 2x_N - x_A = 2\cdot 2 - 1 = 3$άρα Γ(3,1). Συνεπώς ο συντελεστής διεύθυνσης της ΒΓ είναι $\lambda_{BΓ} = \frac{1-0}{3+1} = \frac{1}{4}$ και η

ΒΓ έχει εξίσωση $y - 0 = \frac{1}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Δ4.

Αν δ ευθεία παράλληλη της ΒΝ τότε $\lambda_\delta = \lambda_{BN} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{2+1} = \frac{1}{2}$ και η εξίσωση της δ θα είναι της μορφής δ: $y = \frac{1}{2}x + \mu$, μ∈ $\mathbb{R}$. Η ευθεία δ τέμνει τον άξονα x΄x. στο σημείο Κ(x_k,0) άρα $0 = \frac{1}{2}x_k + \mu \Leftrightarrow x_k = -2\mu$ δηλαδή Κ(-2μ,0) και τον άξονα y΄y στο Λ(0, $y_Λ$) οπότε $y_Λ = \frac{1}{2}\cdot 0 + \mu \Leftrightarrow y_Λ = \mu$ συνεπώς Λ(0,μ).

Άρα $\overrightarrow{KΛ} = (0+2\mu, \mu - 0) = (2\mu, \mu)$ και από υπόθεση $|\overrightarrow{KΛ}| = 2\sqrt{5}$.

Επομένως $\sqrt{(2\mu)^2 + \mu^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 4\mu^2 + \mu^2 = 20 \Leftrightarrow 5\mu^2 = 20 \Leftrightarrow \mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu = \pm 2$.

Οι ζητούμενες ευθείες λοιπόν έχουν εξισώσεις δ_1: $y = \frac{1}{2}x + 2$ και

δ_2 : $y = \frac{1}{2}x - 2$.