

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ 90.

Α2.

Πίνακας 1				
1	2	3	4	5
Ε	Γ	Α	Δ	Β

- Α3. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\text{οπότε } x_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
x^2+2x-8	+	0	- 0	+

Άρα $x \in (-4, 2)$

B2. $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$ ή $x-1 < -1 \Leftrightarrow x < 0$

δηλαδή $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

B3. Αφού $x \in (-4, 2)$ και $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ προκύπτει ότι οι κοινές λύσεις είναι $x \in (-4, 0)$.

B4. Έχουμε:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Αφού $-2 \in (-4, 0)$ ο αριθμός $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων (1) και (2).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ άρα $A_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ διότι:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{ή}$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Άρα $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2, x \neq 3$

Γ2. Έχουμε:

$$x_1 = 2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) = 1 + 4 = 5$$

$$x_2 = -2 \cdot f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + 2\right) = 3 - 4 = -1$$

οπότε: $S = x_1 + x_2 = 5 + (-1) = 4$ και $P = x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-1) = -5$

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού είναι η

$$x^2 - S \cdot x + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x + (-5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x - 5 = 0$$

Γ3. Έχουμε: $A = \left(\frac{2023}{2022}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2023}{2022}\right) - 5$

Αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4 \cdot x - 5$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ή } x_2 = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$x^2 - 4x - 5$	+	0	-	0	+

Αφού $-1 < \frac{2023}{2022} < 5$ το πρόσημο της παράστασης A είναι το ίδιο με το πρόσημο

του τριωνύμου στο διάστημα $(-1, 5)$.

Άρα $A < 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. ι) $\Delta = (3\lambda - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \lambda) = 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 - 8 + 4\lambda = 9\lambda^2 - 2\lambda - 7$

ιι) Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 2\lambda - 7 \geq 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-7) = 4 + 252 = 256$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 9} = \frac{2 \pm 16}{18} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2+16}{18} = \frac{18}{18} = 1 \text{ ή}$$

$$\lambda_2 = \frac{2-16}{18} = \frac{-14}{18} = -\frac{7}{9}$$

Πρόσημο του τριωνύμου

λ	$-\infty$	$-\frac{7}{9}$	1	$+\infty$
$9\lambda^2 - 2\lambda - 7$	$+$	0	0	$+$

οπότε $\lambda \leq -\frac{7}{9}$ ή $\lambda \geq 1$.

Δ2. Έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -(3\lambda - 1) = 1 - 3\lambda \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (1 - 3\lambda)^2 - 2(2 - \lambda) = 1 - 6\lambda + 9\lambda^2 - 4 + 2\lambda = 9\lambda^2 - 4\lambda - 3$$

Δ3. Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 (9 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2) - 6(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) = \\ &= 9\lambda^2 - 4\lambda - 3 + (2 - \lambda)[9(2 - \lambda) + 2] - 6x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = \\ &= 9\lambda^2 - 4\lambda - 3 + (2 - \lambda)(18 - 9\lambda + 2) - 6(2 - \lambda)(1 - 3\lambda) = \\ &= 9\lambda^2 - 4\lambda - 3 + (2 - \lambda)(20 - 9\lambda) - 6(2 - 6\lambda - \lambda + 3\lambda^2) = \\ &= 9\lambda^2 - 4\lambda - 3 + 40 - 18\lambda - 20\lambda + 9\lambda^2 - 12 + 36\lambda + 6\lambda - 18\lambda^2 = \\ &= 15 \end{aligned}$$

Δ4. Η εξίσωση (1) έχει θετικές ρίζες όταν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$9\lambda^2 - 2\lambda - 7 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \leq -\frac{7}{9}$$

$$\text{ή} \\ \lambda \geq 1$$

$$S > 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{και } 1 - 3\lambda > 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{3}$$

$$P > 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{και } 2 - \lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < 2$$

από όπου προκύπτει ότι $\lambda \leq -\frac{7}{9}$