ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 13

Α3.

Πίνακας 1					
1.	2.	3.	4.	5.	.6
ΣΤ	Δ	Α	Β	Γ	Ε

Α4. **(α)** ΛΑΘΟΣ **(β)** ΣΩΣΤΟ **(γ)** ΣΩΣΤΟ **(δ)** ΛΑΘΟΣ **(ε)** ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$$

Β2.

(α) Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$ επομένως

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+3=2\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1=0\Leftrightarrow (\alpha-1)^2=0\Leftrightarrow \alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha=1$$

(β) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

Β3. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σημείο $A(0,f(0))$.

Έχουμε $f(x)=x^2-5x+6$ οπότε $f(0)=6$ άρα $A(0,6)$

Επίσης $f'(x)=2x-5$ και $f'(0)=-5$ άρα $\lambda=f'(0)\Leftrightarrow\lambda=-5$

Το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην $y=\lambda x+\beta$ δηλαδή $6=-5\cdot0+\beta\Leftrightarrow\beta=6$

Οπότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=-5x+6$

Β4. Η f έχει παράγωγο την $f'(x)=2x-5$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-5=0\Leftrightarrow 2x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

Οι αριθμοί -2023 και -2022 βρίσκονται στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε : $-2023<-2022\Leftrightarrow f(-2023)>f(-2022)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2 ισχύει $f(0)=2$ άρα $\beta=2$

Η παράγωγός της f είναι $f'(x)=3x^2-2\alpha x$, από τα δεδομένα της άσκησης γνωρίζουμε ότι $f'(1)=-3 \Leftrightarrow 3-2\alpha=-3 \Leftrightarrow 2\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=3$

Επομένως $f(x)=x^3-3x^2+2$

Γ2. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Αφού η εφαπτομένη στο σημείο Μ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=-3x+1$

Θα ισχύει: $f'(x_0)=-3 \Leftrightarrow 3x_0^{\ 2}-6x_0=-3 \Leftrightarrow 3x_0^{\ 2}-6x_0+3=0$

$$\Leftrightarrow x_0^{\ 2}-2x_0+1=0 \Leftrightarrow (x_0-1)^2=0 \Leftrightarrow x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=1$$

Άρα το σημείο είναι το $M(1,f(1))$ όπου $f(1)=0$ δηλαδή το $M(1,0)$

Η εξίσωση εφαπτομένης έχει την μορφή $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda=-3$ και το σημείο $M(1,0)$ ανήκει στην ευθεία επομένως: $0=-3\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=3$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=-3x+3$

Γ3. Επειδή $f(1)=0$ το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{h}$ γράφεται

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-3$$

Γ4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι η $f'(x)$.Ψάχνουμε να βρούμε πότε η $f'(x)=3x^2-6x$ γίνεται ελάχιστη.

$f''(x)=6x-6$ άρα $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow 6x=6 \Leftrightarrow x=1$

Το πρόσημο της f'' και τα διαστήματα μονοτονίας της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα για $x=1$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f γίνεται ελάχιστος και αυτό συμβαίνει στο σημείο $(1,f(1))$ ή $(1,0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=6-\sqrt{x^2+4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0 \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}>0 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0$$

Άρα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Στη θέση $x=0$ έχει μέγιστο το $f(0)=4$

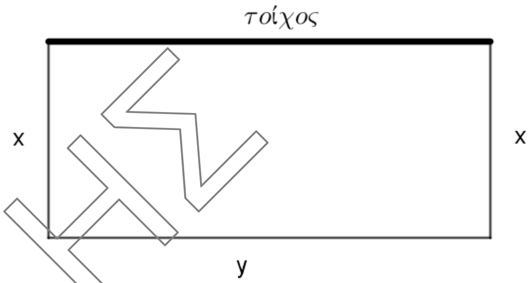
Δ2. Για το όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{f(x)-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{2-\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^4-x^2)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(2-\sqrt{x^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-1)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-1)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{4-x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-x^2+1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)=4$$

Δ3. **(i)** Αν συμβολίσουμε με y την τρίτη πλευρά του οικοπέδου τότε θα έχουμε $2x+y=100 \Leftrightarrow y=100-2x$ (1)



Το εμβαδόν του οικοπέδου είναι $E=x\cdot y$ και λόγω της σχέσης (1) προκύπτει

$$E(x)=x\cdot(100-2x) \Leftrightarrow E(x)=-2x^2+100x$$

Πρέπει $\boxed{x>0}$ και $y>0$ άρα $100-2x>0 \Leftrightarrow 2x<100 \Leftrightarrow \boxed{x<50}$

Άρα $0<x<25$

(ii) Η συνάρτηση $E(x)=-2x^2+100x$ έχει παράγωγο $E'(x)=-4x+100$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow -4x+100=0 \Leftrightarrow x=25$$

$$E'(x)>0 \Leftrightarrow -4x+100>0 \Leftrightarrow 0<x<25$$

x	0	25	50
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗		↘

Άρα για $x=25$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο

Όταν $x=25$ τότε $y=100-2\cdot 25 \Leftrightarrow y=50$