ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 61 σχολικού βιβλίου

Α2. **(α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης :

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x-2(6-2x)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x-12+4x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ 5x=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2\cdot 2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_0, y_0)=(2,2)$

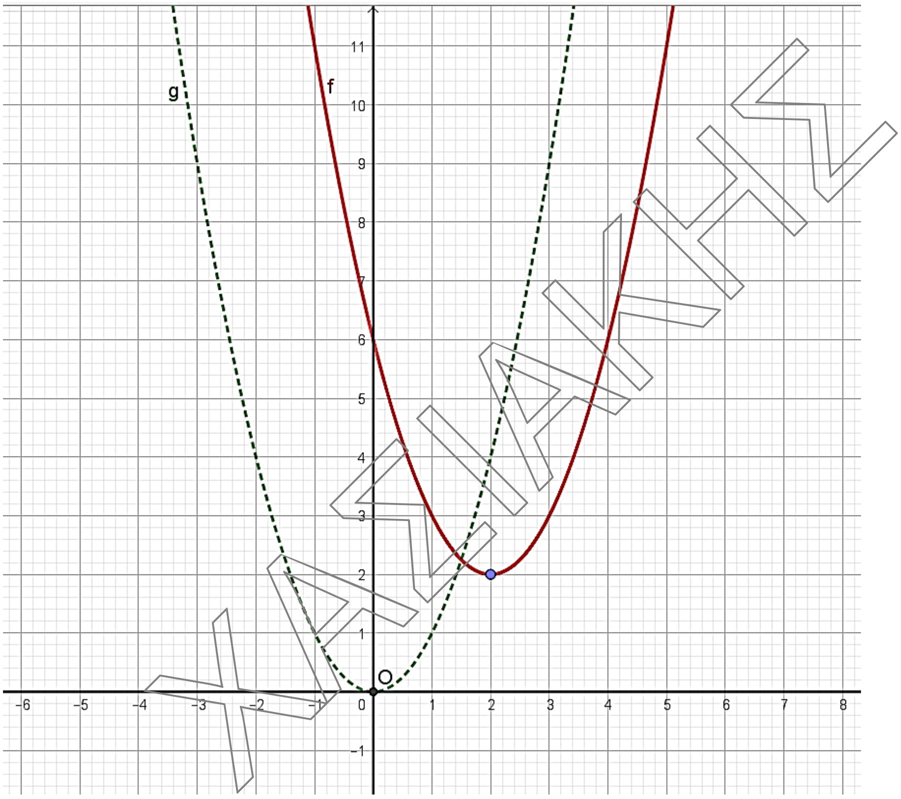
Η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+\alpha$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,6)$

Άρα $f(0)=6 \Leftrightarrow 0^2-4\cdot 0+\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=6$

Επομένως $f(x)=x^2-4x+6 \Leftrightarrow f(x)=x^2-4x+4+2 \Leftrightarrow f(x)=(x-2)^2+2$

Β2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2$ ως εξής

- Μία οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδες προς τα δεξιά
- Μια κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες προς τα πάνω



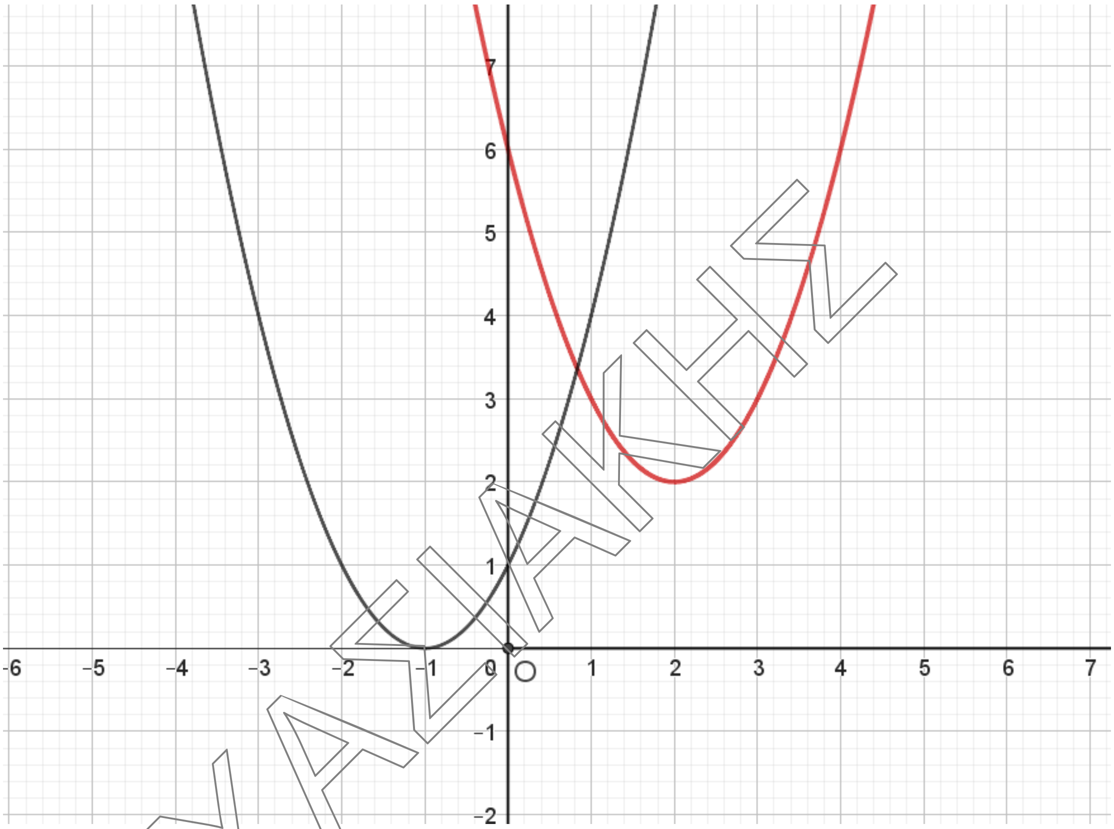
Β3. Οι αριθμοί $\frac{1}{2022},\frac{1}{2023}$ βρίσκονται στο διάστημα $(-\infty,2]$ όπου η συνάρτηση f όπως φαίνεται και από το σχήμα του ερωτήματος **Β2** είναι γνησίως φθίνουσα

Επομένως $\frac{1}{2023}<\frac{1}{2022}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2023}\right)>f\left(\frac{1}{2022}\right)$

Β4. Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει από την γραφική παράσταση της f με μια οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά και μία κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες προς τα κάτω τότε

$h(x)=f(x+1)-2$ δηλαδή $h(x)=(x+1-2)^2+2-2\Leftrightarrow h(x)=(x-1)^2$

Β5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων



Για να είναι η εξίσωση $f(x)=c$ αδύνατη θα πρέπει $c<2$ αφού το 2 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

Για να έχει η εξίσωση $h(x)=c$ δύο ακριβώς λύσεις πρέπει $c>0$

Επομένως $0<c<2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τους όρους της παράστασης Α έχουμε

- $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\eta\mu\alpha$
- $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\eta\mu(\alpha-\pi)=\eta\mu(-(\pi-\alpha))=-\eta\mu(\pi-\alpha)=-\eta\mu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(22\pi+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$

- $$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$
$$=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\eta\mu\alpha$$
- $$\eta\mu(11\pi+\alpha)=\eta\mu(10\pi+\pi+\alpha)=\eta\mu(\pi+\alpha)=-\eta\mu\alpha$$

Άρα η παράσταση Α γίνεται $A=\dfrac{-\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot(-\eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha\cdot(-\eta\mu\alpha)}=-1$

Γ2. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ορίζεται για εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία $\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0$.

$$\sigma\upsilon\nu x\neq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ x\neq 2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\ \text{ ή }\ x\neq\lambda\pi+\frac{\pi}{2},\lambda\in\mathbb{Z}$$

Άρα $A_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\lambda\pi+\dfrac{\pi}{2},\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$

Για κάθε $x\in A_f$ έχουμε $f(x)=\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x}=\dfrac{1-\eta\mu x}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}=\dfrac{1}{1+\eta\mu x}$

Γ3. $f(x)=2, x\in A_f$ επομένως $\dfrac{1}{1-\eta\mu x}=2\Leftrightarrow 1=2-2\eta\mu x\Leftrightarrow 2\eta\mu x=1\Leftrightarrow\eta\mu x=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Βρίσκουμε τις λύσεις που βρίσκονται στο διάστημα $(0,3\pi)$

Για $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε $0\le x\le 3\pi \Leftrightarrow$ $0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\le 3\pi \Leftrightarrow$ $0\le 2\kappa+\frac{1}{6}\le 3 \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{6}\le 2\kappa\le 3-\frac{1}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{6}\le 2\kappa\le \frac{17}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{12}\le \kappa\le \frac{17}{12}$ Οι μοναδικοί ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $\left[-\frac{1}{12},\frac{17}{12}\right]$ Είναι το 0 και το 1 Άρα $x=\frac{\pi}{6}$ και $x=2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$	Για $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε $0\le x\le 3\pi \Leftrightarrow$ $0\le 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\le 3\pi \Leftrightarrow$ $0\le 2\kappa+\frac{5}{6}\le 3 \Leftrightarrow$ $-\frac{5}{6}\le 2\kappa\le 3-\frac{5}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{5}{6}\le 2\kappa\le \frac{13}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{5}{12}\le \kappa\le \frac{13}{12}$ Οι μοναδικοί ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $\left[-\frac{5}{12},\frac{13}{12}\right]$ Είναι το 0 και το 1 Άρα $x=\frac{5\pi}{6}$ και $x=2\pi+\frac{5\pi}{6}=\frac{17\pi}{6}$

Γ4. $f(\omega)\cdot \eta\mu^2\omega\cdot f(-\omega)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\eta\mu\omega}\cdot\eta\mu^2\omega\cdot\frac{1}{1+\eta\mu(-\omega)}=3\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{(1+\eta\mu\omega)(1-\eta\mu\omega)}=3$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{1-\eta\mu^2\omega}=3\Leftrightarrow\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=3\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega=3 \underset{\varepsilon\varphi\omega<0}{\overset{\omega\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}} \varepsilon\varphi\omega=-\sqrt{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{4}\underset{\sigma\upsilon\nu\omega<0}{\overset{\omega\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}$$

Εναλλακτικά

Αφού $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$ και $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τότε $\omega = \frac{2\pi}{3}$ άρα $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της είναι το 2 άρα $\rho = 2$. Η περίοδος της είναι $T = 4$ άρα $\frac{2\pi}{\omega} = 4 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$

Επομένως $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$

Το σημείο $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης δηλαδή $f(0) = 0$

Όμως για την $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(0) = 2$ άτοπό ενώ για την $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(0) = 0$ επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$

Για την $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή επομένως έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.

Δ2. Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0 \overset{f(-x)=-f(x)}{\Leftrightarrow} -f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

Ισχύει $2 < \frac{9}{\pi} < 3$ και στο διάστημα $(2,3)$ η f παίρνει αρνητικές τιμές άρα $f\left(\frac{9}{\pi}\right) < 0$

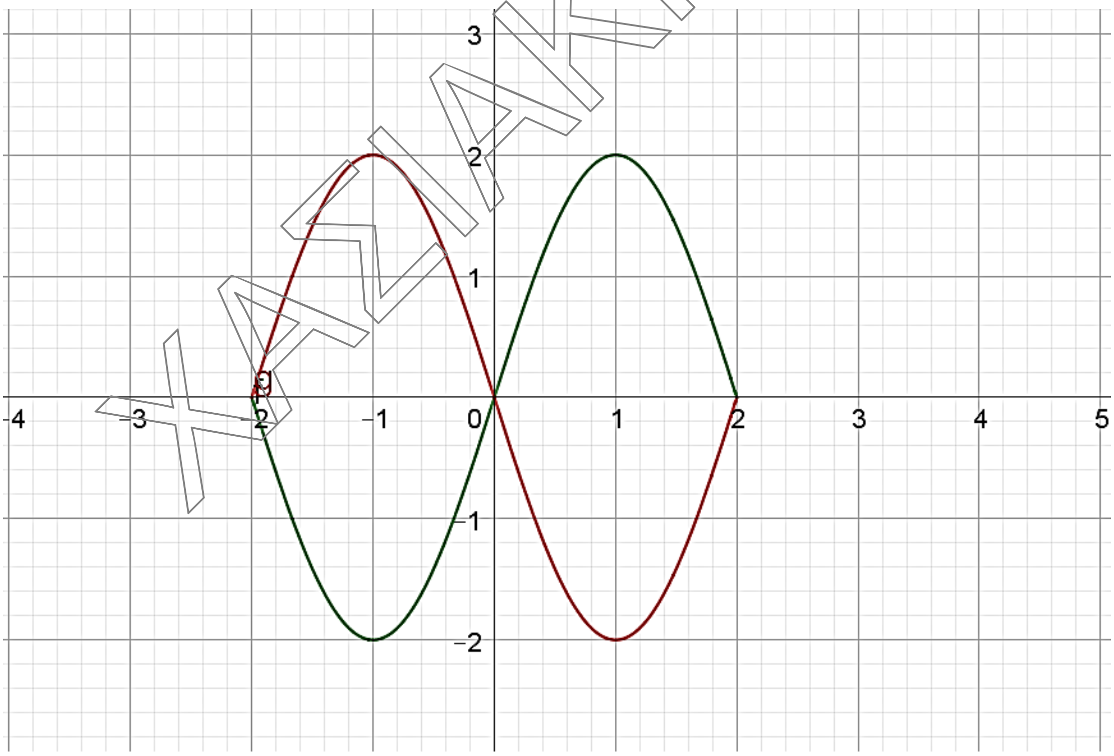
Ισχύει $1<\frac{\pi}{3}<2$ και στο διάστημα $(1,2)$ η f παίρνει θετικέ τιμές άρα $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$

Δ3.

(i) $g(x)=f(x+2)=2\eta\mu\left[\frac{\pi}{2}(x+2)\right]=2\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{2}x\right)=-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-f(x)$

(ii) Άρα η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.

Οι γραφικές τους παραστάσεις στο διάστημα $[-2,2]$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



$f(x)=g(x)+c \Leftrightarrow f(x)=-f(x)+c \Leftrightarrow f(x)=\frac{c}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{c}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{c}{4}$

Πρέπει $\frac{c}{4}=-1$ ή $\frac{c}{4}=1$ άρα $c=-4$ ή $c=4$ και επειδή $c>0$ δεκτή η $c=4$

Δ4. $f^2(-x)+g^2(x)=2f^2(-1)\Leftrightarrow\left(-f(x)\right)^2+\left(-f(x)\right)^2=2\left[2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2\Leftrightarrow$

$f^2(-x)+g^2(x)=2f^2(-1)\Leftrightarrow f^2(x)+f^2(x)=8\Leftrightarrow f^2(x)=4\Leftrightarrow f(x)=2$ ή $f(x)=-2$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=2\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=4\kappa+1$$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-2\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-1\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=4\kappa-1,\kappa\in\mathbb{Z}$$