ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου

Α2 **α)** Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$

- $Β\hat{Δ}Α = Β\hat{Δ}Ε = 90°$
- $ΑΔ = ΔΕ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΖΓΜ$

- $ΒΜ = ΜΓ$ ($ΑΜ$ διάμεσος)
- $ΑΜ = ΜΖ$ (υπόθεση)
- $Α\hat{Μ}Β = Γ\hat{Μ}Ζ$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β3. Από την σύγκριση στο ερώτημα Β1 έχουμε ότι $AB = BE \ (1)$

Από την σύγκριση στο ερώτημα Β2 έχουμε ότι $AB = \Gamma Z \ (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $BE = \Gamma Z$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ΓBE

- $AB = B\Gamma$ (υπόθεση)
- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $B\Delta = BE$ (υπόθεση)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γ2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $AE\Gamma$

- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$ (από την 1η σύγκριση)
- $A\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γ3.

<u>1ος Τρόπος</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ το οποίο ισχύει από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2.

<u>2ος Τρόπος</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι: $AM = M\Gamma$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔAM και $E\Gamma M$

- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $A\hat{\Delta}M = \Gamma\hat{E}M$ (από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2)
- $\Delta\hat{A}M = E\hat{\Gamma}M$ (ως διαφορά ίσων γωνιών
$$\begin{array}{r} \Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \\ -\ M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A \\ \hline \Delta\hat{A}M = E\hat{\Gamma}M \end{array}$$
)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $ΑΜ = ΜΓ$ συνεπώς το τρίγωνο $ΑΜΓ$ είναι ισοσκελές.

Γ4. Η γωνία $Δ\hat{Α}x'$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΔΑΓ$, άρα θα ισχύει:

$Δ\hat{Α}x' > Δ\hat{Γ}Α = Μ\hat{Γ}Α$. Όμως αποδείξαμε ότι το τρίγωνο $ΑΜΓ$ είναι ισοσκελές οπότε $Μ\hat{Γ}Α = Μ\hat{Α}Γ$, άρα $Δ\hat{Α}x' > Μ\hat{Α}Γ$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $Ρ$ εξωτερικό σημείο του κύκλου $(Λ,\rho)$ άρα $ΡΑ = ΡΒ$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Έχουμε $Ρ$ εξωτερικό σημείο του κύκλου $(Κ,R)$ άρα $ΡΓ = ΡΔ$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε:
$$\begin{array}{rl} & ΡΓ = ΡΔ \\ - & ΡΑ = ΡΒ \\ \hline & ΑΓ = ΒΔ \end{array}$$

Δ2.

<u>1^{ος} Τρόπος</u>

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΚΑΓ$ και $ΚΒΔ$

- $Κ\hat{Γ}Α = Κ\hat{Δ}Β = 90°$
- $ΑΓ = ΒΔ$ (από Δ1 ερώτημα)
- $ΚΓ = ΚΔ$ (ως ακτίνες)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $ΚΑ = ΚΒ$ οπότε το τρίγωνο $ΚΑΒ$ είναι ισοσκελές.

<u>2^{ος} Τρόπος</u>

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΛΚ$ και $ΒΛΚ$

- $ΑΛ = ΒΛ$ (ως ακτίνες)
- $Α\hat{Λ}Κ = Β\hat{Λ}Κ$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $Α\hat{Λ}Ρ$ και $Β\hat{Λ}Ρ$)
  (έχουμε $Α\hat{Λ}Ρ = Β\hat{Λ}Ρ$ διότι η $ΡΛ$ είναι διακεντρική ευθεία)
- $ΚΛ$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $ΚΑ = ΚΒ$

οπότε το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

3ος Τρόπος

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα KAP και KBP

- $\text{PA}=\text{PB}$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)
- $\text{A}\hat{\text{P}}\text{K}=\text{B}\hat{\text{P}}\text{K}$ (η KP είναι διακεντρική ευθεία)
- KP (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\text{KA}=\text{KB}$ οπότε το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

Δ3. i) Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\text{K}\Lambda\text{A}$ έχουμε

$$\text{KA}<\text{K}\Lambda+\Lambda\text{A}\Leftrightarrow$$
$$\text{KA}<(R+\rho)+\rho\Leftrightarrow$$
$$\text{KA}<R+2\rho\Leftrightarrow$$
$$\text{KA}<2\rho+2\rho\Leftrightarrow$$
$$\text{KA}<4\rho$$

ii) Έχουμε $\Pi=\text{KA}+\text{KB}+\text{AB}$

από Δ3 i) ερώτημα έχουμε ότι $\text{KA}<4\rho$

από Δ2 ερώτημα έχουμε ότι $\text{KA}=\text{KB}$ άρα $\text{KB}<4\rho$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\text{A}\Lambda\text{B}$ έχουμε

$$\text{AB}<\Lambda\text{A}+\Lambda\text{B}\Leftrightarrow$$
$$\text{AB}<\rho+\rho\Leftrightarrow$$
$$\text{AB}<2\rho$$

Άρα
$$\text{KA}<4\rho$$
$$\text{KB}<4\rho$$
$$+\ \text{AB}<2\rho$$
$$\overline{\text{KA}+\text{KB}+\text{AB}<4\rho+4\rho+2\rho}\Leftrightarrow$$
$$\Pi<10\rho$$