

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 27 Απριλίου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 30

Α3. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Α4. (I) $\alpha \rightarrow 2$ $\beta \rightarrow 5$ $\gamma \rightarrow 1$ $\delta \rightarrow 3$ (II) α) $A_f = \mathbb{R}$ β) $A_f = [0, +\infty)$ γ) $A_f = \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } \bar{x} = 6 \Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha}{3} + 4 + \alpha + 3 + 5\alpha - 5 + 13 - 2\alpha + 7 + \alpha + 2 + 6 - \alpha + 5}{8} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha}{3} + 4\alpha + 35}{8} = 6 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 12\alpha}{3} + 35 = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow \frac{13\alpha}{3} = 48 - 35 \Leftrightarrow$$

$$\frac{13\alpha}{3} = 13 \Leftrightarrow 13\alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = \frac{39}{13} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

B2. Οι 8 αριθμοί θα είναι: 5, 6, 10, 7, 7, 5, 3, 5.

Σε αύξουσα σειρά: 3, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 10

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10 - 3 \Leftrightarrow R = 7$$

$v=8$ (άρτιος) Μεσαίες: η $4^{\text{η}} \rightarrow 5$ και η $5^{\text{η}} \rightarrow 6$. Άρα $\delta = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \delta = 5,5$

$$\begin{aligned} \text{B3. } s^2 &= \frac{(3-6)^2 + (5-6)^2 \cdot 3 + (6-6)^2 + (7-6)^2 \cdot 2 + (10-6)^2}{8} = \frac{9+3+0+2+16}{8} = \\ &= \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3,75. \quad \text{Άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,75} \approx 1,93 \end{aligned}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,93}{6} \approx 0,32 \text{ ή } 32\%.$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, γιατί $CV > 10\%$.

$$\text{B4. Νέα μέση τιμή: } \bar{y} = \bar{x} + \frac{30}{100} \bar{x} - 2 = \bar{x}(1+0,3) - 2 = 6 \cdot 1,3 - 2 \Leftrightarrow \bar{y} = 5,8$$

$$\text{Νέα τυπική απόκλιση: } s_y = s_x + \frac{30}{100} s_x = s_x(1+0,3) = 1,93 \cdot 1,3 = 2,509$$

$$CV' = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2,509}{5,8} \approx 0,43 \text{ ή } 43\%$$

Ομοιογενέστερος πληθυσμός είναι ο παλιός, γιατί $CV < CV'$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει: $x \geq 0$ και $2 - \sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \neq 2^2 \Leftrightarrow x \neq 4$

$$\text{Άρα } A_f = [0,4) \cup (4,+\infty)$$

$$\Gamma 2. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{9}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(\kappa x^2 - 2x - 8)'(2 - \sqrt{x}) - (\kappa x^2 - 2x - 8)(2 - \sqrt{x})'}{(2 - \sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{(2\kappa x - 2)(2 - \sqrt{x}) - (\kappa x^2 - 2x - 8)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2 - \sqrt{x})^2}$$

$$f'(1) = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(2\kappa \cdot 1 - 2)(2 - \sqrt{1}) - (\kappa \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 8)\left(-\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)}{(2 - \sqrt{1})^2} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\kappa - 2) \cdot 1 - (\kappa - 10)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1^2} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2\kappa - 2 + \frac{\kappa - 10}{2} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa - 4 + \kappa - 10 = -9 \Leftrightarrow 5\kappa = -9 + 14 \Leftrightarrow 5\kappa = 5 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

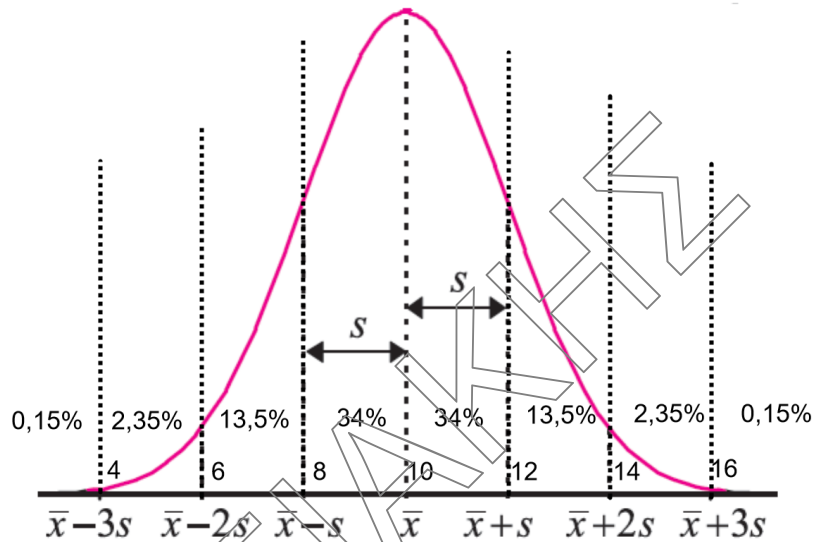
$$\Gamma 3. \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{2 - \sqrt{x}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)(2+\sqrt{x})}{2^2 - (\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)(2+\sqrt{x})}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)(2+\sqrt{x})}{-(x-4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+2)(2+\sqrt{x})}{-1} = -(4+2)(2+\sqrt{4}) = -6 \cdot 4 = -24$$

Γ4. Κανονική κατανομή $\rightarrow \delta = \bar{x} = 10$.

Έχουμε $\frac{640}{4000} = 0,16$ ή 16%, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα από $\bar{x} + s$ και μετά. Άρα $\bar{x} + s = 12 \Leftrightarrow s = 12 - 10 \Leftrightarrow s = 2$.



Το πολύ 6 έχουν τιμή το 2,5% των παρατηρήσεων.

$$0,025 \cdot 4000 = 100 \text{ παρατηρήσεις} \rightarrow \alpha = 100$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -24 \text{ (Από Γ3 ερώτημα)}$$

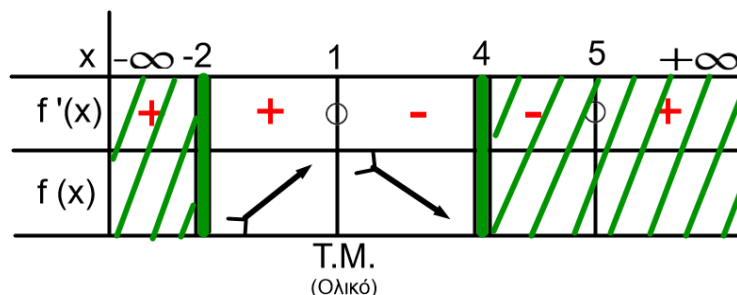
$$g(4) = -\frac{6}{25} \cdot \alpha = -\frac{6}{25} \cdot 100 = -6 \cdot 4 = -24$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = g(4) = -24$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (3x^2)' + (5x)' - \left(\frac{1}{3}\right)' = x^2 - 6x + 5$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \quad , \quad x_1 = 5 \quad \text{ή} \quad x_2 = 1$$



Στο $(-2,1]$ η f είναι γν. Αύξουσα. Στο $[1,4)$ η f είναι γν. Φθίνουσα.

$$\begin{aligned} \text{Στο } x_0 = 1 \text{ η } f \text{ παρουσιάζει Μέγιστο (ολικό) : } f(1) &= \frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{3} - 3 + 5 - \frac{1}{3} = 2. \end{aligned}$$

Δ2.

Κλάσεις	Κέντρο x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i v_i$
$[-2, 0)$	-1	1	1	0,05	0,05	-1
$[0, 2)$	1	5	6	0,25	0,30	5
$[2, 4)$	3	4	10	0,20	0,50	12
$[4, 6)$	5	6	16	0,30	0,80	30
$[6, 8)$	7	4	20	0,20	1,00	28
Σύνολα		20		1,00		74

1^η κλάση: $[α, α+c)$ 2^η κλάση: $[α+c, α+2c)$ 3^η κλάση: $[α+2c, α+3c)$ κλπ.

Το πλάτος ισούται με το ακρότατο, άρα $c = f(1) = 2$.

Η συχνότητα της 1^{ης} κλάσης ισούται με $v_1 = x_0$ (θέση ακρότατου f) = 1.

$$\text{Είναι κέντρο } x_3 = 3 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2c + \alpha + 3c}{2} = 3 \Leftrightarrow 2\alpha + 5c = 6 \Leftrightarrow 2\alpha + 5 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 6 - 10 \Leftrightarrow 2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

$$f_1 = F_1 = 0,05 \quad , \quad N_1 = v_1 = 1 \quad , \quad v = \frac{v_1}{f_1} = \frac{1}{0,05} = \frac{100}{5} = 20$$

$$v_2 = f_2 \cdot v = 0,25 \cdot 20 = 5 \quad , \quad v_3 = N_3 - N_2 = 10 - 6 = 4 \quad , \quad f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{4}{20} = 0,2$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{20} = 0,3 \quad , \quad v_5 = N_5 - N_4 = 20 - 16 = 4 \quad , \quad f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{4}{20} = 0,2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{74}{20} = 3,7$$

Δ3. Σημείο $A(x, 2)$ αρχή των Αξόνων $(0, 0)$

Απόσταση $(OA) = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (2-0)^2} =$
 $= \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}$, την οποία ονομάζω $d(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$ και θα την μελετήσω ως προς τα ακρότατα.

$$d'(x) = (\sqrt{x^2 + 4})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot (x^2 + 4)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d'(x)$		0	
$d(x)$			

T.E.

Άρα για $x = 0$ η απόσταση γίνεται ελάχιστη.

Η ελάχιστη απόσταση είναι: $d(0) = \sqrt{0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$

Δ4. $h(x) = -f'(x) = -2 \cdot d'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 4} = -(x^2 - 6x + 5) - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot \sqrt{x^2 + 4} =$
 $= -x^2 + 6x - 5 - 2x = -x^2 + 4x - 5$

Η εφαπτομένη της C_h έχει εξίσωση της μορφής: $y = \lambda x + \beta$, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 9$. Συνεπώς $\lambda_{\text{εφαπτομένης}} \cdot \lambda_{\text{ευθείας}} = -1$.

$$\lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2 \Leftrightarrow h'(x_0) = 2$$

Είναι: $h'(x) = -(x^2)' + (4x)' - (5)' = -2x + 4$

$$h'(x_0) = 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_0 + 4 = 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_0 = -4 + 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$h(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = -1 + 4 - 5 = 4 - 6 = -2 = y$$

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow -2 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -2 - 2 = \beta \Rightarrow -4 = \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 2x - 4$.