

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2Θ(ε)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022  
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\varepsilon$  του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $M(x_1, y_1)$  είναι  $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

Μονάδες 7

Α2. Τι ονομάζουμε παραβολή με διευθετούσα ευθεία  $\delta$  και εστία  $E$  σημείο εκτός της  $\delta$ ;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Τα σημεία της παραβολής  $x^2 = 2py$  με  $p < 0$  και  $y \neq 0$  βρίσκονται στο 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος αξόνων  $xOy$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Σωστό ή Λάθος.

Μονάδες 1

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1. Η ευθεία με εξίσωση  $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\eta} = (A, B)$ .
  2. Αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$  τότε για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  θα ισχύει υποχρεωτικά  $\vec{\alpha} = \vec{0}$  ή  $\vec{\beta} = \vec{0}$ .
  3. Η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  έχει εφαπτομένη στο σημείο της  $M(x_1, y_1)$  την ευθεία  $\frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{b^2} = 1$ .
  4. Η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $y = \frac{b}{a}x$  και  $y = -\frac{b}{a}x$ .
  5. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν  $\Gamma < 0$ .

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ ,  $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = -3$  και η παραβολή  $y^2 = -4\vec{\alpha}\vec{\beta} \cdot x$ .

**B1. α)** Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$  και  $|\vec{\beta}| = 2 \cdot \sqrt{3}$ .

**Μονάδες 4**

**β)** Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο  $E(3,0)$  και να βρείτε την εξίσωση της διευθετούσας δ.

**Μονάδες 4**

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της παραβολής στο σημείο της  $A(1, 2\sqrt{3})$  καθώς και την γωνία που αυτή σχηματίζει με τον  $x'x$  άξονα.

**Μονάδες 6**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2Θ(ε)

**B3.** Αν  $B$  είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$  να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 4

**B4.** Να δείξετε ότι  $\varepsilon \parallel GE$  όπου  $G$  το σημείο τομής της ευθείας  $OA$  και της διευθετούσας  $\delta$ .

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: 3x - y - 1 = 0$ ,  $\varepsilon_2: 2x + y + 6 = 0$  και το τρίγωνο  $K\Lambda M$  όπου  $K$  το σημείο τομής των  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\Lambda$ ,  $M$  τα συμμετρικά σημεία του  $K$  ως προς τον  $x'x$  και  $y'y$  άξονα αντίστοιχα.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $K(-1, -4)$ , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\Lambda M$  και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $K\Lambda M$ .

Μονάδες 6

**Γ2.** Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

Μονάδες 6

**Γ3.** Αν  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής της  $\varepsilon_2$  με τον  $x'x$ , να βρείτε σημείο  $A$  της  $\varepsilon_1$  ώστε τα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  και  $A$  να είναι συνευθειακά.

Μονάδες 7

**Γ4.** Αν  $M(x, y)$  σημείο της ευθείας  $\varepsilon_1$  ή της  $\varepsilon_2$  να αποδείξετε ότι ισχύει  $6x^2 - y^2 + xy + 16x - 7y - 6 = 0$ .

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022**  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2Θ(ε)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + (\lambda + 6)x + (3\lambda + 4)y + 3 - \lambda = 0$  (1).

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda \neq -2$ , να βρείτε το κέντρο, την ακτίνα και να αποδείξετε ότι το σημείο  $A(-2,1)$  είναι κοινό σημείο όλων των κύκλων της μορφής (1).

**Μονάδες 6**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) είναι τα σημεία της ευθείας  $y = 3x + 7$  εκτός του σημείου της  $A$ .

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C_1$  που ορίζει η εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία  $\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 7$ .

**Μονάδες 7**

- Δ4.** Να βρείτε τα σημεία του άξονα  $x'x$  των οποίων η μέγιστη απόσταση από τον κύκλο  $C_1$  είναι μεγαλύτερη από  $5 + \sqrt{10}$ .

**Μονάδες 6****Ευχόμαστε επιτυχία!**