ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31

Α2. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

Α3. i) δ ii) β iii) γ iv) δ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f θα πρέπει $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$ και $\sqrt{x+2}-2\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}\neq 2 \Leftrightarrow x+2\neq 4 \Leftrightarrow x\neq 2$. Τελικά $A_f=[-2,2)\cup(2,+\infty)$.

Β2. Για $x\in A_f$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2) = 4 .$$

Β3. Είναι $g(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}, & x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)\\ 4, & x=2\end{cases}$.

Για να είναι η g συνεχής στο $x_0=2$ θα πρέπει $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)=4$. Πράγματι, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=4$, από ερώτημα Β2 και τελικά η g είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Β4. Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία όπου ισχύει $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, όπου απορρίπτεται καθώς το 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στα σημεία όπου ισχύει $f(0)=\frac{-2}{\sqrt{2}-2}=\frac{-2(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=\frac{-2(\sqrt{2}+2)}{-2}=\sqrt{2}+2$. Άρα τελικά η C_f τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0, \sqrt{2}+2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η εφαπτομένη της της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$K(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x άρα:

$f'(2)=0$ με $f'(x)=-12x^2+4ax$

Άρα $f'(2)=0$

$\Leftrightarrow -12\cdot(2)^2+4\cdot a\cdot 2=0$

$\Leftrightarrow -48+8a=0$

$\Leftrightarrow -48+48+8a=0+48$

$\Leftrightarrow 8a=48$

$\Leftrightarrow a=6$

Γ2. Η συνάρτηση είναι: $f(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4$

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με 12 άρα θα υπάρχει κάποιο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f'(\chi_0) = 12$$

$$\Leftrightarrow -12 \cdot {\chi_0}^2 + 24\chi_0 = 12$$

$$\Leftrightarrow -12 \cdot {\chi_0}^2 + 24\chi_0 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12 \cdot {\chi_0}^2 + 24\chi_0 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot {\chi_0}^2 - 24\chi_0 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow {\chi_0}^2 - 2\chi_0 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\chi_0 - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi_0 = 1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $\chi_0 = 1$ θα έχει μορφή: $y = \lambda x + \beta \ \mu\varepsilon \ \lambda = f'(\chi_0) = 12$.

$$y = f(1) = -4(1)^3 + 12(1)^2 + 4 = -4 + 12 + 4 = 12$$

$$y = 12x + \beta \Leftrightarrow 12 = 12 \cdot (1) + \beta \Leftrightarrow 12 - 12 = \beta \Leftrightarrow \beta = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης : $y = 12x$.

Γ3. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = f'(-1) = -12 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (1) = 12$

Γ4. $(AB) = \sqrt{(\chi_B - \chi_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$

$$\sqrt{(2-1)^2 + (20-12)^2} =$$

$$\sqrt{1+8^2} = \sqrt{65}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εφαπτομένη της της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 1$ θα έχει μορφή:

$$y = \lambda x + \beta \;\mu\varepsilon\; \lambda = f'(\alpha) = -2\alpha + 2$$

.

$$y = f(\alpha) = -\alpha^2 + 2\alpha$$

Άρα

$$y = (-2\alpha + 2)\chi + \beta$$
$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 2\alpha = (-2\alpha + 2)\alpha + \beta$$
$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 2\alpha = -2\alpha^2 + 2\alpha + \beta$$
$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 2\alpha + 2\alpha^2 - 2\alpha = \beta$$
$$\Leftrightarrow \beta = \alpha^2$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = (2 - 2a)x + a^2$$

Δ2.

i) Για το σημείο Α αντικαθιστώ όπου y=0 στην εξίσωση της εφαπτομένης και έχω:

$$0 = (2-2a)x + a^2$$
$$\Leftrightarrow -a^2 = (2-2a)x$$
$$\Leftrightarrow \frac{-a^2}{(2-2a)} = x \text{ με το } 2-2\alpha < 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2}{(2a-2)} \text{ άρα } A\left(\frac{a^2}{(2a-2)}, 0\right)$$

Για το σημείο Β αντικαθιστώ όπου x=0 στην εξίσωση της εφαπτομένης και έχω:

$$y = (2-2a)\cdot 0 + a^2$$
$$\Leftrightarrow y = a^2, \text{άρα } B(0, a^2)$$

ii) $\mathrm{E} = \frac{(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})}{2}$ με $(OA) = \frac{a^2}{(2a-2)}$ $και\ (OB) = a^2$

$$\mathrm{E}(\alpha) = \frac{\frac{a^2}{(2a-2)}\cdot a^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{E}(\alpha) = \frac{a^4}{2(2a-2)}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{E}(\alpha) = \frac{a^4}{4(a-1)}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς α είναι

$$\mathrm{E}'(\alpha) = \left(\frac{a^4}{4(a-1)}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}'(\alpha) = \frac{3a^4 - 4a^3}{4(a-1)^2} \text{ ο ζητούμενος ρυθμός είναι } \mathrm{E}'(2) = 4$$

iii) Η επιτάχυνση του σώματος δίνεται από τον τύπο

$$a(t) = u'(t) = S''(t) = 12t + 2$$

Άρα για t=2 $a(2) = 26m/s^2$