ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η απόδειξη βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 106.

Α2. Ο ορισμός βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 33.

Α3. Η διατύπωση του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 51.

Α4. **(α)** Σωστό **(β)** Λάθος **(γ)** Σωστό **(δ)** Σωστό **(ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον η κλίση της C_f στο σημείο με τετμημένη $x=0$ είναι ίση με 2 τότε ισχύει : $f'(0)=2$

Η f παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο :

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha x-1}{\alpha x+1}\right)'=\frac{(\alpha x-1)'\cdot(\alpha x+1)-(\alpha x-1)\cdot(\alpha x+1)'}{(\alpha x+1)^2}=$$

$$=\frac{\alpha\cdot(\alpha x+1)-\alpha(\alpha x-1)}{(\alpha x+1)^2}=\frac{\alpha^2x+\alpha-\alpha^2x+\alpha}{(\alpha x+1)^2}=\frac{2\alpha}{(\alpha x+1)^2}$$

Άρα $f'(0)=2\Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1$

Β2. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-1}{x+1}, x>-1$ μετασχηματίζεται ως εξής :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x-1+1-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

Έστω $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x_1+1}<-\frac{2}{x_2+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x_1+1}<1-\frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $A=(-1,+\infty)$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(-1,+\infty)$ άρα

$$f(A)=\left(\lim_{x\to -1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=(-\infty,1)=A_{f^{-1}}$$

Διότι : $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1^+}\left[(x-1)\cdot\frac{1}{x+1}\right]=(-2)\cdot(+\infty)=-\infty$

Αφού $x+1>0$ για κάθε $x>-1$ και $\lim_{x\to -1^+}(x+1)=0$ άρα $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$

Επίσης $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x}=1$

$f(x)=y$ με $x\in(-1,+\infty)$ και $y\in(-\infty,1)$

$\frac{x-1}{x+1}=y \Leftrightarrow x-1=xy+y \Leftrightarrow x-xy=y+1 \Leftrightarrow x(1-y)=y+1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{1-y}$

Άρα $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{1-x}$ με $A_{f^{-1}}=(-\infty,1)$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1 με το θεώρημα $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow x_1=x_2$ και στην συνέχεια να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x παίρνοντας τους περιορισμούς που ισχύουν για το x και όσους προκύπταν από την επίλυση της εξίσωσης.

Β3. Για να ορίζεται η $f^{-1}\circ f^{-1}$ πρέπει : $x\in A_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x)\in A_{f^{-1}}$

Δηλαδή

$$x<1$$

και

$$\frac{x+1}{1-x}<1\Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x}-1<0\Leftrightarrow \frac{x+1-1+x}{1-x}<0\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x}<0\Leftrightarrow x(1-x)<0\Leftrightarrow -x^2+x<0$$

$\Leftrightarrow x>1$ ή $x<0$ και επειδή πρέπει και $x<1$ άρα $A_{f^{-1}\circ f^{-1}}=(-\infty,0)$

$$\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)=f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\frac{1-x+1+x}{1-x}}{\frac{1-x-1-x}{1-x}}=\frac{2}{-2x}=-\frac{1}{x}$$

Β4. Η συνάρτηση $f^{-1}\left(e^x\right)$ ορίζεται όταν $x\in\mathbb{R}$ και $e^x<1$ άρα $x<0$

$$\lim_{x\to 0^-} f^{-1}\left(e^x\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0^-}\left[\left(1+e^x\right)\cdot\frac{1}{1-e^x}\right]=+\infty$$

Διότι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+e^x\right)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-e^x\right)=0$ και όταν

$$x<0\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow 1-e^x>0 \text{ άρα } \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-e^x}=+\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι

$$(\varepsilon_1): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=f'(1)x+f(1)-f'(1)$$

Η (ε_1) και η $(\varepsilon): y=4x-\frac{1}{2}$ ταυτίζονται άρα : $f'(1)=4$ και $f(1)-f'(1)=-\frac{1}{2}$

- $f(x)=\lambda x^3+x+\frac{3}{2}$ επομένως $f(1)=\lambda+\frac{5}{2}$

- $f'(x)=3\lambda x^2+1$ επομένως $f'(1)=3\lambda+1$

$$f'(1)=4 \Leftrightarrow 3\lambda+1=4 \Leftrightarrow \lambda=1$$

και

$$f(1)-f'(1)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda+\frac{5}{2}-3\lambda-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=1$$

Άρα για $\lambda=1$ η $(\varepsilon): y=4x-\frac{1}{2}$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$

Γ2. Για $x<0$ είναι : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right)=0$$

διότι :

Υπολογίζουμε το κάθε όριο ξεχωριστά έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=0\cdot\sqrt{1+0}=0$$

Επίσης ισχύει : $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu^2 x|}{|x^2|}\le\frac{1}{x^2}$, άρα $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

Όμως $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)^2=0$

Γ3. Για $\lambda=1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}, & x<0\\ x^3+x+\frac{3}{2}, & x\ge 0\end{cases}$

$$f(0)=\frac{3}{2} \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3+x+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\left(1-\eta\mu^2 x\right)}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-1^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=\frac{1}{2}+1^2=\frac{3}{2}$$

Άρα η f συνεχής στο $x=0$ αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\frac{3}{2}$

Γ4.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left[\left(x^3+x+\frac{3}{2}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x^3+x+\frac{3}{2}}{x^3}\cdot x^3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]=1$$

Διότι υπολογίζοντας τα όρια ξεχωριστά έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+x+\frac{3}{2}}{x^3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^3}=1 \text{ και } \lim_{x\to +\infty} x^3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^3}\right)\overset{*}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

(*) Θέτουμε $u=\frac{1}{x^3}$ και $u_0=\lim_{x\to +\infty} u=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει : $f^2(x)-2συνx\cdot f(x)=3+ημ^2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**

Η **(1)** ισοδύναμα γίνεται :

$$f^2(x)-2συνx\cdot f(x)=3+1-συν^2x \Leftrightarrow f^2(x)-2συνx\cdot f(x)+συν^2x=4$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-συνx)^2=4 \Leftrightarrow \sqrt{(f(x)-συνx)^2}=\sqrt{4} \Leftrightarrow |f(x)-συνx|=2$$

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-συνx, x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow |g(x)|=0 \Leftrightarrow |f(x)-συνx|=0 \Leftrightarrow 2=0 \text{ αδύνατη.}$$

Άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η $g(x)=f(x)-συνx, x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ η (1) γίνεται :

$f^2(0)-2\cdot f(0)=3 \Leftrightarrow f^2(0)-2\cdot f(0)-3=0 \Leftrightarrow f(0)=3$ ή $f(0)=-1$ και λόγω της υπόθεσης $f(0)>0$ δεκτή η $f(0)=3$

Για $x=0$, $g(0)=f(0)-συν0 \Leftrightarrow g(0)=2$ και επειδή η g διατηρεί πρόσημο $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $f(x)-συνx=2 \Leftrightarrow f(x)=2+συνx$

Δ2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)-f(x)+f(x)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)-(-f'(x))=2f'(x) \text{ διότι :}$$

Το πρώτο όριο είναι : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)$

Για το δεύτερο όριο $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)$

θέτουμε $h=-u$ άρα όταν $h\to 0$ και $u\to 0$

Άρα : $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{f(x+u)-f(x)}{-u}\right)=-\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}\right)=-f'(x)$

Η $f(x)=\text{συν}x+2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\text{ημ}x$ επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=-2\text{ημ}x$$

Δ3. Η $\varphi(x)=\ln(\text{συν}x+2)$ είναι συνεχής στο $\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ως σύνθεση συνεχών

συναρτήσεων και $\varphi(0)=\ln 3,\ \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln 2$.

Ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα $[\ln 2,\ln 3]$ που ορίζουν οι τιμές της φ

στα άκρα άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=1$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x)=\varphi(x)-1$ και να εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano στο $\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Δ4. Ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ώστε $f(\xi)=\sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)}$ για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

Η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x+2$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Διότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \underset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{\Leftrightarrow}} \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 + 2 > \sigma\upsilon\nu x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = [2,3]$

Έχουμε:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\alpha) < f(0) \Leftrightarrow 2 < f(\alpha) < 3$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\beta) < f(0) \Leftrightarrow 2 < f(\beta) < 3$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί) έχουμε

$$4 < f(\alpha)\cdot f(\beta) < 9 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)} < 3$$

Επομένως από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)}$,

Το ξ είναι μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο Δ.

Β' τρόπος

<u>Υπόδειξη</u> με το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $\varphi_1(x) = f^2(x) - f(\alpha)\cdot f(\beta), x \in [\alpha,\beta]$ και τη μονοτονία της $f^2(x)$ για τη μοναδικότητα της ρίζας.