ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$ του επιπέδου Oxy να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

Α2. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 4

Α3. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα, δίνεται ο ισχυρισμός: «η παράσταση $\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2} \cdot \vec{i}$ είναι ίση με πραγματικό αριθμό».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό αυτό ως Σωστό ή Λάθος.

Μονάδες 1

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \ \vec{\beta}$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει $\vec{\alpha} = \ \vec{\beta}$.
2. Οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_o)$ έχει εξίσωση της μορφής $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$.
3. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι πάντα ομόρροπα.
4. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$.
5. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι πάντα $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του οποίου η πλευρά ΑΒ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(2{,}0)$ και $B(0{,}2)$. Το κέντρο του τετραγώνου είναι η αρχή των αξόνων $O(0{,}0)$.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΑΒ του τετραγώνου.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του τετραγώνου και να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΔ έχει εξίσωση την διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΒΓ, καθώς και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα και έπειτα τα εσωτερικά γινόμενα :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ 2) $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$ 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ όπου $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{2}$ και $\overrightarrow{AM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A\Gamma}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x+1, x)$, $\vec{\beta} = (-4x, -x-1)$ και $\vec{\gamma} = (x, -2x)$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $x = 1$.

Μονάδες 9

Για $x = 1$

Γ2. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-3,1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ να βρείτε το εμβαδόν του $τριγώνου\ OB\Gamma$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ όπου για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν :

- $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$
- $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 = 0$
- η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι αμβλεία.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ αν Μ το μέσο της ΑΓ.

Μονάδες 8

Δ3. Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \sqrt{7} \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 2$.

Μονάδες 5

Δ4. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{\beta} - [\vec{\alpha}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})] \cdot \vec{\alpha} - |\vec{\alpha}\vec{\beta}| \cdot \vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι $(\overrightarrow{AB} + \vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Μονάδες 7