ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 22 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

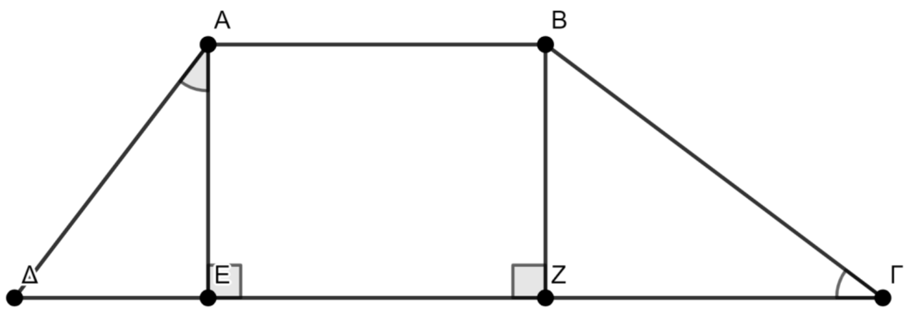
ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη θεώρημα IV σελ.45 σχολικό βιβλίο.

Α2.

α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β



Β1. Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΖΓ

$B Z^2 + Z\Gamma^2 = B\Gamma^2$

$3^2 + Z\Gamma^2 = 5^2$

$9 + Z\Gamma^2 = 25$

$Z\Gamma^2 = 16$

$Z\Gamma = 4$

Β2. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν $\hat{E} = \hat{Z} = 90°$ και $\Delta\hat{A}E = B\hat{\Gamma}Z$. Άρα είναι όμοια

Β3. Επειδή τα τρίγωνα είναι όμοια έχουν τις πλευρές ανάλογες επομένως:

$\frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{AE}{Z\Gamma} = \frac{\Delta E}{BZ}$

Β4. Ισχύει ότι $\frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{AE}{Z\Gamma}$

$\frac{A\Delta}{5} = \frac{3}{4}$

$4A\Delta = 15$

$A\Delta = \frac{15}{4}$.

Επίσης ισχύει ότι

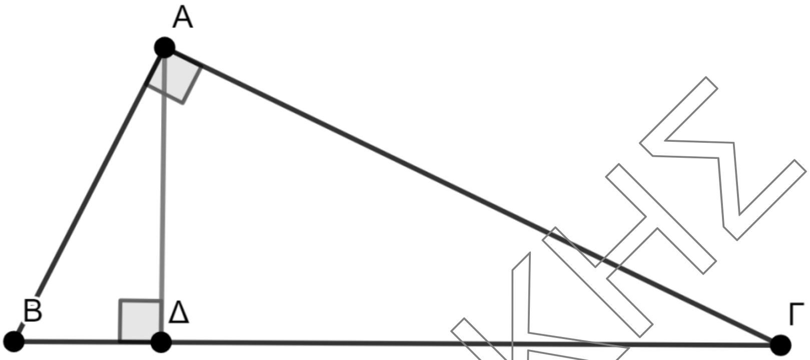
$\frac{AE}{Z\Gamma} = \frac{\Delta E}{BZ}$

$\frac{3}{4} = \frac{\Delta E}{3}$

$9 = 4\Delta E$

$\Delta E = \frac{9}{4}$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Έστω ΒΔ=χ οπότε ΓΔ=10-χ

Από την μετρική σχέση Α$\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ έχουμε

$4^2 = \chi \cdot (10 - \chi)$

$16 = 10\chi - \chi^2$

$\chi^2 - 10\chi + 16 = 0$ με λύσεις $\chi = 2$ ή $\chi = 8$

Για χ=2, ΒΔ=2 και ΓΔ=8 που είναι δεκτή

Ενώ χ=8, ΒΔ=8 και ΓΔ=2 απορρίπτεται εφόσον ΒΔ<ΓΔ

Γ2. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε

$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2$

$AB^2 = 2^2 + 4^2$

$AB^2 = 20$

$AB = \sqrt{20}$

$AB = 2\sqrt{5}$

Γ3. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε

$A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + A\Delta^2$

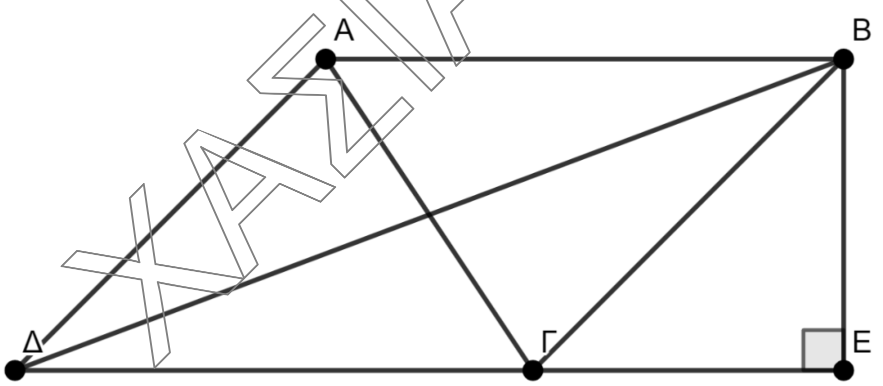
$A\Gamma^2 = 8^2 + 4^2$

$A\Gamma^2 = 80$

$A\Gamma = \sqrt{80}$

$A\Gamma = 4\sqrt{5}$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Επειδή ισχύει $\Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 + \sqrt{2}\cdot\Delta\Gamma\cdot B\Gamma$

θα έχουμε ότι $\Delta B^2 > \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2$ άρα στο τρίγωνο ΒΔΓ η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

Δ2. (1ος τρόπος)

i) Από το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΔΓ ισχύει

$\Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2\cdot\Delta\Gamma\cdot\Gamma E$ (1).

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$\Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 + \sqrt{2}\cdot\Delta\Gamma\cdot B\Gamma$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\Gamma E = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot B\Gamma$$

ii) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε

$$B\Gamma^2 = \Gamma E^2 + BE^2$$

$$B\Gamma^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}B\Gamma\right)^2 + BE^2$$

$$B\Gamma^2 - \frac{1}{2}B\Gamma^2 = BE^2$$

$$BE = \sqrt{\frac{1}{2}B\Gamma^2}$$

$$BE = \frac{\sqrt{2}}{2}B\Gamma$$

Δηλαδή ΒΕ=ΓΕ

Δ2. (2[ος] τρόπος)

i) Από νόμο συνημίτονων στο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε

$\Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2 \cdot \Delta\Gamma \cdot B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$ (1).

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$\Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 + \sqrt{2} \cdot B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$\sigma\upsilon\nu\Gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ που σημαίνει ότι

$\Delta\hat{\Gamma}B = 135°$ και επομένως $B\hat{\Gamma}E = \varphi = 45°$.

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\Gamma E}{B\Gamma}$$

$$\Gamma E = \frac{\sqrt{2}}{2}B\Gamma$$

ii) Επειδή $B\hat{\Gamma}E = 45°$ και $\Gamma\hat{E}B = 90°$ το τρίγωνο $\Gamma\hat{E}B$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Δηλαδή ΒΕ=ΓΕ

Δ3. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει
$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \cdot B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$

Επειδή Β=45° και ΑΒ = ΔΓ

έχουμε ότι $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 - \sqrt{2} \cdot \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$