ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Παρασκευή 7 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 60.Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Α2. Σελίδα 31.Ορισμός.

Α3. 1.Λ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν λ = 1,τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=1$.
Το τελευταίο έχει άπειρες λύσεις, επομένως οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται (συμπίπτουν).
Αν λ = -1, τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$.
Το τελευταίο είναι αδύνατο, επομένως οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

Β2. Η σχετική θέση των ευθειών εξαρτάται από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων τους, δηλαδή από το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=\lambda^2 \\ x+\lambda y=1 \end{cases} (\Sigma)$

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1),\ D_y=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=-\lambda(\lambda-1)$$

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1 \kappa\alpha\iota \lambda \neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \\ y = \dfrac{-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1} \\ y = \dfrac{-\lambda}{\lambda+1} \end{cases}$$

, επομένως οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $M\left(\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}, -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)$.

Β2. Αν λ = 0, τότε από Β1, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $M\left(\dfrac{0^2+0+1}{0+1}, -\dfrac{0}{0+1}\right)$, δηλαδή $M(1,0)$. Το σημείο $M(1,0)$ προφανώς ανήκει και στην ευθεία ε_3, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, συνεπώς οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ διέρχονται από το σημείο $M(1,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - \eta\mu^3 2\alpha = \eta\mu 2\alpha(2 - \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - \eta\mu^2 2\alpha) =$

$\eta\mu 2\alpha[2 - (\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha)] = \eta\mu 2\alpha(2-1) = \eta\mu 2\alpha.$

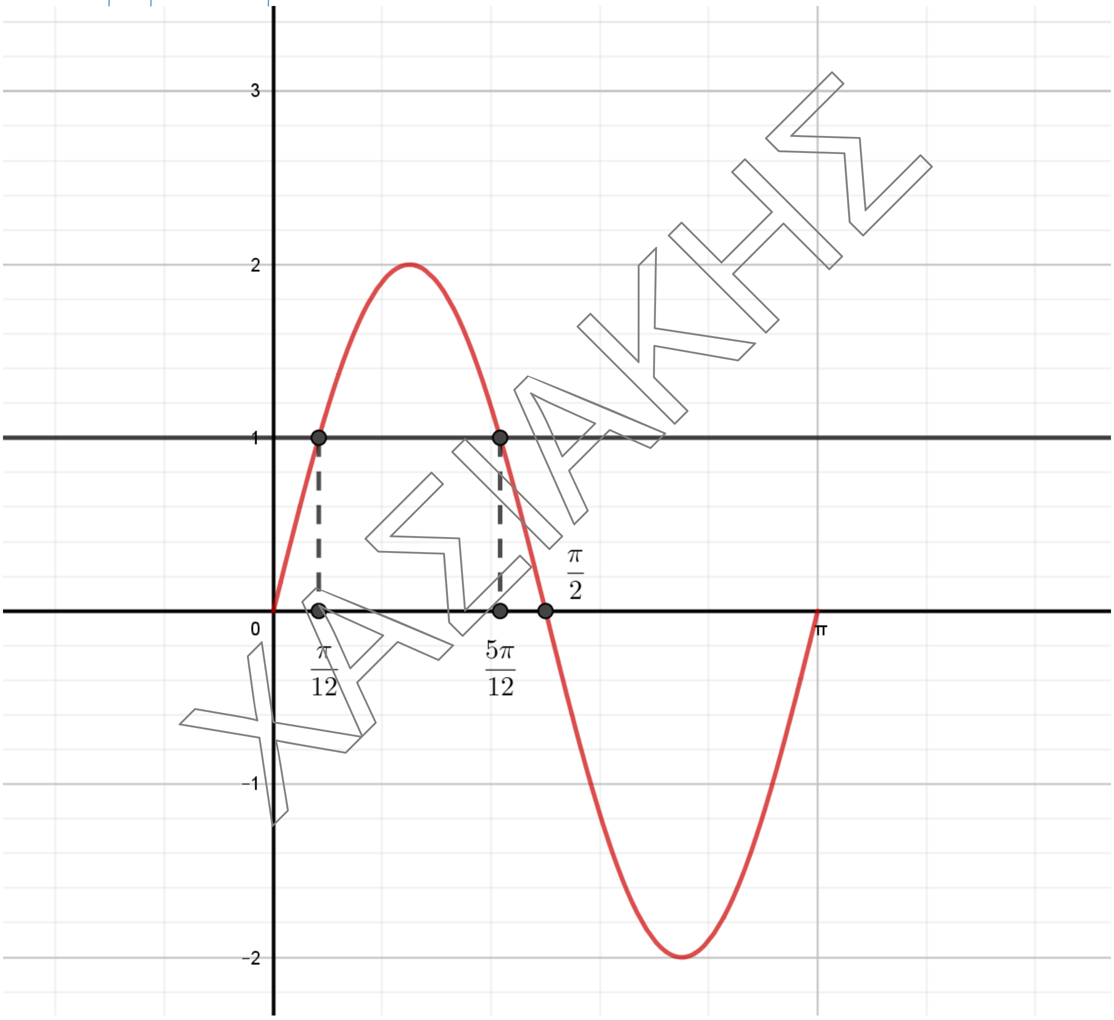
Γ2.

i) $f(x) = 2(2\eta\mu 2x - \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu^2 2x - \eta\mu^3 2x)$ Από Γ1, αν θεωρήσουμε $\alpha = 2x$ τότε $f(x) = 2\eta\mu 2x, A = \mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = 2\eta\mu 2(-x) = -2\eta\mu 2x = -f(x)$. Η συνάρτηση είναι περιττή.

ii) Από θεωρία είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x), \rho > 0$ έχει ελάχιστο –ρ, μέγιστο ρ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Για ρ = 2 και ω = 2, προκύπτει, Μέγιστη τιμή 2, Ελάχιστη -2 και περίοδος $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Γ3. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	2	0	-2	0



Γ4. $f(x)=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 2x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{12} \end{cases} \kappa\in\mathbb{Z}.$$ Επειδή, $x\in[0,\pi] \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}$ ή $x=\frac{5\pi}{12}$.

Στο σχήμα του Γ3 επαληθεύεται από τη γραφική παράσταση ότι η ευθεία $y=1$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία που ασφαλώς έχουν τετμημένες $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να έχει νόημα το $f(x)$ πρέπει $\alpha-\eta\mu^2 x\neq 0$. Για $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu^2 x=1$.

Από τα προηγούμενα και το πεδίο ορισμού Α συμπεραίνουμε ότι

$\alpha-\eta\mu^2 x=0\Leftrightarrow \alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha=1$.

Δ2. i) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu x\leq 1\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x\geq 0$ και $1-\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x>0$ για $x\in A$. Επομένως $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in A$

ii) Παρατηρούμε ότι για x=0 είναι f(0)=0. Άρα $f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in A$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x=0 και συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο.

Δ3. i) Από την υπόθεση έχουμε $g(x)=f(x-\pi)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x-\pi)}{1-(\eta\mu(x-\pi))^2}=\frac{1-(-\sigma\upsilon\nu x)}{1-(-\eta\mu x)^2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}$

ii) α΄ τρόπος

$$g^2(x)>f^2(x)\Leftrightarrow g^2(x)-f^2(x)>0\Leftrightarrow (g(x)+f(x)(g(x)-f(x)>0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}-\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)>0\Leftrightarrow \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0\Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{\sigma\upsilon\nu^3 x}>0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^3 x>0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>0$$

Η τελευταία είναι αληθής στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ επομένως , λόγω των ισοδυναμιών αληθεύει και η αρχική.

β΄ τρόπος

$$g^2(x)=\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)^2=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{(\sigma\upsilon\nu^2 x)^2}=\frac{1+2\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}$$

$$f^2(x)=\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)^2=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}{(\sigma\upsilon\nu^2 x)^2}=\frac{1-2\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}$$

$$g^2(x)-f^2(x)=\frac{1+2\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}-\frac{1-2\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}=\frac{4}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$$

Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

συνx > 0 άρα και συν^{3}x > 0 επομένως $\frac{4}{συν^3 x} > 0$. Έτσι έχουμε τελικά

$g^2(x) - f^2(x) > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > f^2(x)$