ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 22 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 42 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$

- $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}E = 90^\circ$
- $A\Delta = \Delta E$ (υπόθεση)
- $B\Delta$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BE\Gamma$

- $AB = BE$ (από την 1η σύγκριση)
- $A\hat{B}\Gamma = E\hat{B}\Gamma$ (από την 1η σύγκριση)
- $B\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β3. Επειδή τα σημεία $Β$ και $Γ$ ισαπέχουν από τα σημεία $Α$ και $Ε$, η $ΒΓ$ είναι μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΕ$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $ΑΒ = ΑΓ \Leftrightarrow$

$$ΑΔ + ΔΒ = ΑΕ + ΕΓ \Leftrightarrow$$
$$ΑΔ + 3ΑΔ = ΑΕ + 3ΑΕ \Leftrightarrow$$
$$4ΑΔ = 4ΑΕ \Leftrightarrow$$
$$ΑΔ = ΑΕ$$

Γ2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΑΚΕ$

- $ΑΔ = ΑΕ$ (από το $1^ο$ ερώτημα)
- $Δ\hat{Α}Κ = Ε\hat{Α}Κ$ (η $ΑΜ$ ως ύψος στη βάση του ισοσκελούς τρίγωνου $ΑΒΓ$ είναι και διχοτόμος)
- $ΑΚ$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $ΔΚ = ΚΕ$

Γ3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΚΜ$ και $ΗΚΜ$

- $Κ\hat{Μ}Ζ = Κ\hat{Μ}Η = 90°$
- $Ζ\hat{Κ}Μ = Η\hat{Κ}Μ$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $Ε\hat{Κ}Α$ και $Δ\hat{Κ}Α$)
- $ΚΜ$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως $ΚΖ = ΚΗ$ άρα το τρίγωνο $ΚΖΗ$ είναι ισοσκελές.

Γ4. Η $ΑΜ$ ως ύψος στη βάση του ισοσκελούς τρίγωνου $ΑΒΓ$ είναι και και διάμεσος συνεπώς ισχύει $ΜΒ = ΜΓ$.

Ακόμα επειδή τα τρίγωνα $ΖΚΜ$ και $ΗΚΜ$ είναι ίσα ισχύει $ΜΖ = ΜΗ$

Άρα $ΜΒ = ΜΓ$

$$\begin{array}{l} ΜΖ = ΜΗ \quad - \\ \hline ΒΖ = ΗΓ \end{array}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΡΔ$ και $ΒΡΖ$

- $Ρ\hat{Α}Δ = Ρ\hat{Β}Ζ = 90°$
- $ΑΔ = ΒΖ$ (ως ίσες προεκτάσεις των ακτίνων $ΟΑ$ και $ΟΒ$)
- $ΡΑ = ΡΒ$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\hat{Δ} = \hat{Ζ}$

Δ2. Από την προηγούμενη σύγκρισή έχουμε $Δ\hat{Ρ}Α = Ζ\hat{Ρ}Β$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Ρ}Ο = Β\hat{Ρ}Ο$ διότι η $ΟΡ$ είναι διακεντρική ευθεία.

Άρα $Δ\hat{Ρ}Α = Ζ\hat{Ρ}Β$

$$\begin{array}{l} Α\hat{Ρ}Ο = Β\hat{Ρ}Ο \; + \\ \hline Δ\hat{Ρ}Ο = Ζ\hat{Ρ}Ο \end{array}$$

Άρα η $ΟΡ$ διχοτομεί την γωνία $Δ\hat{Ρ}Ζ$

Δ3. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΑΟΒ$ έχουμε

$ΑΒ < ΑΟ + ΟΒ \Leftrightarrow$

$ΑΒ < ΟΒ + ΒΖ \Leftrightarrow$

$ΑΒ < ΟΖ$

Δ4. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΔΟΡ$ έχουμε

$ΔΟ < ΔΡ + ΡΟ$

Όμως στο τρίγωνο $ΔΡΟ$ η $ΡΑ$ είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι ισοσκελές άρα $ΔΡ = ΡΟ$ οπότε:

$ΔΟ < ΡΟ + ΡΟ \Leftrightarrow$

$ΔΟ < 2ΡΟ \Leftrightarrow$

επίσης στο τρίγωνο $ΟΡΖ$ η $ΡΒ$ είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι και αυτό ισοσκελές άρα $ΡΟ = ΡΖ$ οπότε:

$ΔΟ < 2ΡΖ$ (1)

Ακόμα από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OPZ έχουμε

$\mathrm{OZ} < \mathrm{PO} + \mathrm{PZ} \Leftrightarrow$

$\mathrm{OZ} < 2\mathrm{PZ}$ (2)

Από $(1)+(2)$ έχουμε: $\Delta\mathrm{O} + \mathrm{OZ} < 4\mathrm{PZ}$

Εναλλακτικά έχουμε:

Παρατηρούμε ότι: $\Delta\mathrm{A} = \mathrm{AO} = \mathrm{OB} = \mathrm{BZ} = \rho$

Έχουμε $\Delta\mathrm{O} + \mathrm{OZ} < 4\mathrm{P}\Delta \Leftrightarrow$

$\Delta\mathrm{A} + \mathrm{AO} + \mathrm{OB} + \mathrm{BZ} = 4\Delta\mathrm{P} \Leftrightarrow$

$\rho + \rho + \rho + \rho < 4\Delta\mathrm{P} \Leftrightarrow$

$4\rho < 4\Delta\mathrm{P} \Leftrightarrow$

$\rho < \Delta\mathrm{P} \Leftrightarrow$

$\mathrm{A}\Delta < \Delta\mathrm{P}$ το οποίο ισχύει διότι στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A}\Delta\mathrm{P}$ η $\Delta\mathrm{P}$ είναι υποτείνουσα και η $\mathrm{A}\Delta$ κάθετη.