



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 28 Απριλίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. (α) Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 2]$

(β) $f(x) = f(-2) \Leftrightarrow f(x) = 8$, από το σχήμα προκύπτει ότι $x = 4$ και $x = -2$

(γ) Στις θέσεις $x = -2$ και $x = 4$ έχει μέγιστο το 8 , ενώ στη θέση $x = 2$ έχει ελάχιστο το 0

A2. (α)

A3. (δ)

A4 (α) Λάθος

(β) Λάθος

(γ) Λάθος

(δ) Σωστό

(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Εφόσον το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$ ο αριθμός -1 θα είναι ρίζα του

$$\text{δηλαδή : } P(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + \beta + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 4 \quad (1)$$

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι 12 οπότε

$$P(2) = 12 \Leftrightarrow 16 + 8\alpha + 4\beta - 2 + 2 = 12 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta = 4 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -1 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2)

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 4 \\ \alpha - (-1 - 2\alpha) = 4 \\ \beta = -1 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 1 + 2\alpha = 4 \\ \beta = -1 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ \beta = -1 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Άρα $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ οπότε το πολυώνυμο είναι το

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$$

B2. $P(x) = 0$, εφόσον ο αριθμός -1 είναι ρίζα από το σχήμα Horner :

1	1	-3	-1	2	-1
↓	-1	0	3	-2	
1	0	-3	2	0	

ισοδύναμα γράφεται $P(x) = (x+1)(x^3 - 3x + 2)$, το πολυώνυμο $x^3 - 3x + 2$ έχει ακέραιους συντελεστές οπότε οι πιθανές του ακέραιες ρίζες είναι : $\pm 1, \pm 2$

Με χρήση του σχήματος Horner έχουμε :

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

Τελικά: $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x-2)$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ή} \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή} \\ x=1 \text{ ή } x=-2 \end{cases}$$

B3. Ζητάμε τις λύσεις της ανίσωσης $P(x) > 0$

Επειδή: $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x-2)$, βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα του $P(x)$ ξεχωριστά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα με το γινόμενο τους να βρίσκετε στην τελευταία γραμμή :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$x-1$	-	-	-	○	+	
$x+1$	-	-	○	+	+	
x^2+x-2	+	○	-	-	○	+
$P(x)$	+	-	+	-	+	

Άρα $P(x) > 0$ όταν $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

B4. Στην εξίσωση $\eta\mu^4\theta + \eta\mu^3\theta - 3\eta\mu^2\theta - \eta\mu\theta + 2 = 0$

θέτουμε $\eta\mu\theta = x$, $-1 \leq x \leq 1$

άρα γίνεται $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $x = -1$, $x = 1$ και $x = 2$, η οποία απορρίπτεται λόγω του περιορισμού οπότε :

$$\eta\mu\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 - 10\eta\mu\omega + 4 + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0 \Leftrightarrow 2 - 10\eta\mu\omega + 4(1 - \eta\mu^2\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 10\eta\mu\omega + 4 - 4\eta\mu^2\omega = 0 \Leftrightarrow -4\eta\mu^2\omega - 10\eta\mu\omega + 6 = 0$$

Θέτουμε $\eta\mu\omega = y$, με $-1 \leq y \leq 1$

άρα η τελευταία εξίσωση γίνεται $-4y^2 - 10y + 6 = 0$, οποία έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και $\frac{1}{2}$, από τις οποίες δεκτή είναι μόνο η $y = \frac{1}{2}$

$$\text{Επομένως: } \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \stackrel{\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{5\pi}{6}$$

Γ2. Έχουμε $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο με το $(x+1)$

2	-5	-4	3	-1
↓	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

$$f(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3), x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{ή} \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ή} \\ x = 3 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},0)$ και $\Gamma(3,0)$

Επίσης $f(0) = 3$, άρα τέμνει και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0,3)$

Γ3. $\frac{f(x)}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow f(x)(2x-1) \leq 0, 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

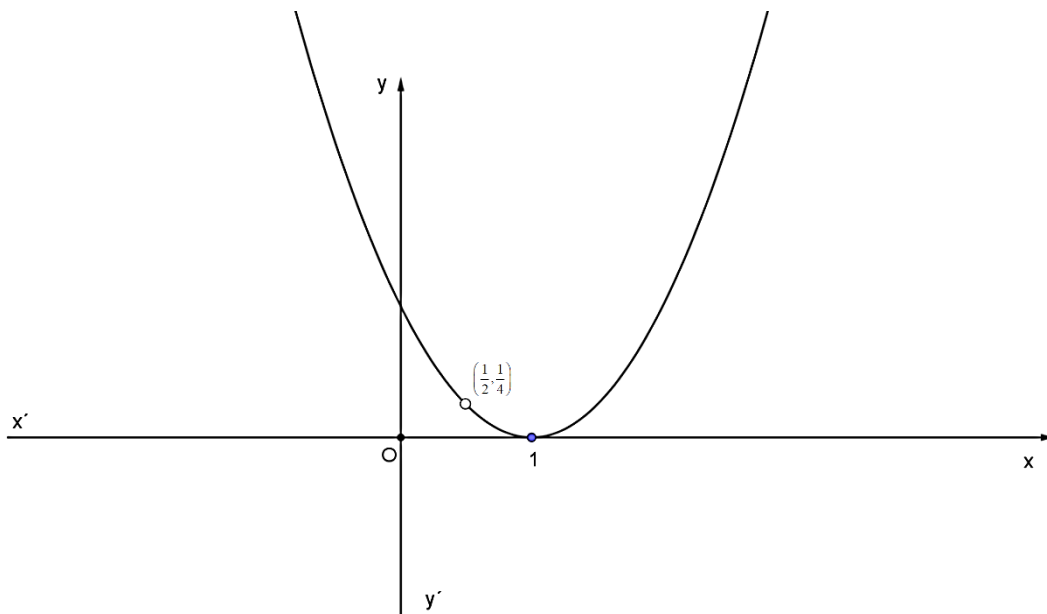
x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
x+1	-	○	+	+	+
2x-1	-	-	○	+	+
$2x^2-7x+3$	+	+	○	-	+
$f(x)(2x-1)$	+	-	-	+	+

άρα $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right]$

$g(x) = \frac{f(x)}{2x-1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{(x+1)(x-3)(2x-1)}{2x-1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 3, x \neq \frac{1}{2}$

Έχουμε $h(x) = g(x) + 4 = x^2 - 2x - 3 + 4 \Leftrightarrow h(x) = (x-1)^2, x \neq \frac{1}{2}$

Άρα η γραφική παράσταση της h προκύπτει από την παραβολή $y = x^2$ με μία οριζόντια μετατόπιση μία μονάδα προς τα αριστερά με εξαίρεση το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$



Γ4. Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$2(e^{x^2} + 2)^3 - 5(e^{x^2} + 2)^2 > 4e^{x^2} + 5 \Leftrightarrow 2(e^{x^2} + 2)^3 - 5(e^{x^2} + 2)^2 - 4e^{x^2} - 5 > 0$$

$$2(e^{x^2} + 2)^3 - 5(e^{x^2} + 2)^2 - 4e^{x^2} - 8 + 3 > 0 \Leftrightarrow 2(e^{x^2} + 2)^3 - 5(e^{x^2} + 2)^2 - 4(e^{x^2} + 2) + 3 > 0$$

(1)

Το πρώτο μέλος της **(1)** είναι η συνάρτηση f *άλλα* στην θέση του x έχει αντικατασταθεί το $e^{x^2} + 2$

$$\text{Ισχύει: } f(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3) \Leftrightarrow f(x) = (x+1)(x-3)(2x-1)$$

$$\text{Άρα: } (e^{x^2} + 3)(2e^{x^2} + 3)(e^{x^2} - 1) > 0, \text{ όμως } (e^{x^2} + 3) > 0 \text{ και } (2e^{x^2} + 3) > 0$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } e^{x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Β' τρόπος

$$\text{Στην ανίσωση } 2(e^{x^2} + 2)^3 - 5(e^{x^2} + 2)^2 > 4e^{x^2} + 5 \text{ θέτουμε } e^{x^2} + 2 = w > 0$$

$$2w^3 - 5w^2 > 4(w-2) + 5 \Leftrightarrow 2w^3 - 5w^2 - 4w + 3 > 0$$

$$\text{Άρα: } (w+1)(w-3)(2w-1) > 0 \text{ οπότε: } (e^{x^2} + 3)(e^{x^2} - 1)(2e^{x^2} + 3) > 0$$

$$\text{όμως } (e^{x^2} + 3) > 0 \text{ και } (2e^{x^2} + 3) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε}$$

$$e^{x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να ορίζεται η f πρέπει : $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$

και $8^x + 3 \cdot 4^x - 4 > 0$, για την λύση της τελευταίας έχουμε :

$$8^x + 3 \cdot 4^x - 4 > 0 \Leftrightarrow (2^x)^3 + 3(2^x)^2 - 4 > 0 \text{ (1)}$$

Θέτουμε: $2^x = w > 0$ άρα η **(1)** γίνεται:

$$w^3 + 3w^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow w^3 + 4w^2 - w^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow w^2(w-1) + 4(w^2-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow w^2(w-1) + 4(w-1)(w+1) > 0 \Leftrightarrow (w-1)(w^2 + 4w + 4) > 0 \Leftrightarrow (w-1)(w+2)^2 > 0$$

$$\text{Οπότε: } (2^x)^3 + 3(2^x)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = (0, +\infty)$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x) = \ln(8^x + 3 \cdot 4^x - 4) - \ln(2^x - 1) - 1$ για κάθε $x > 0$ ισοδύναμα γίνεται

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(8^x + 3 \cdot 4^x - 4) - \ln(2^x - 1) - 1 = \ln\left[\frac{(2^x - 1)(2^x + 2)^2}{2^x - 1}\right] - \ln(2^x - 1) - 1 \\ &= \ln\left[\frac{(2^x - 1)(2^x + 2)^2}{(2^x - 1)}\right] - 1 = \ln(2^x + 2)^2 - 1 = 2\ln(2^x + 2) - 1 \end{aligned}$$

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 2^{x_1} + 2 < 2^{x_2} + 2 \Leftrightarrow \ln(2^{x_1} + 2) < \ln(2^{x_2} + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(2^{x_1} + 2) < 2\ln(2^{x_2} + 2) \Leftrightarrow 2\ln(2^{x_1} + 2) - 1 < 2\ln(2^{x_2} + 2) - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$

Δ3. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) \leq 2\ln \frac{10}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) - 1 \leq 2(\ln 10 - \ln \sqrt{e})$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) - 1 \leq 2\ln 10 - 2\ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) - 1 \leq 2\ln 10 - \ln e$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) - 1 \leq 2\ln 10 - 1 \Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) \leq 2\ln 10 \Leftrightarrow 2^x + 2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 2^x \leq 8 \Leftrightarrow 2^x \leq 2^3 \Leftrightarrow x \leq 3 \quad \text{και επειδή έχουμε ότι } x > 0 \text{ τότε } x \in (0, 3]$$

Δ4. ισχύει ότι : $\eta\mu^2(1130^\circ) + \eta\mu^2(40^\circ) = 1$

διότι: $1130^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 50^\circ$ άρα $\eta\mu^2(1130^\circ) = \eta\mu^2(50^\circ) = \sigma\upsilon\nu^2(40^\circ)$

άρα για $x > 0$ έχουμε

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\ln(2^x + 2) = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^x + 2) = 1 \Leftrightarrow 2^x + 2 = e \Leftrightarrow 2^x = e - 2 \Leftrightarrow x = \log_2(e - 2), \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{διότι : } 0 < e - 2 < 1 \Leftrightarrow \log_2(e - 2) < \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2(e - 2) < 0$$

ΧΑΝΣΙΑΚΗ