

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x)) \text{ και για } h \neq 0$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} \right] = cf'(x)$$

$$\text{Άρα } (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

Α3. α)Σ β)Λ γ)Σ δ)Λ ε)Σ

Α4. $\alpha \rightarrow 2, \beta \rightarrow 3, \gamma \rightarrow 6, \delta \rightarrow 4, \varepsilon \rightarrow 1, \zeta \rightarrow 5$

ΘΕΜΑ Β

B1. α) Το πεδίο ορισμού είναι: $x \in (-3, -1) \cup (-1, 1] \cup (3, 4]$

Το Σύνολο τιμών είναι: $\Sigma T = [0, 3]$

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x = -2$ και $x = 0$

Η λύση της ανίσωσης είναι $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, 4]$

γ) Για $x \in (-3, -1) \cup (3, 4]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x \in (-1, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x = 1$ το $f(1) = 0$, δηλαδή στο σημείο $(1, 0)$ έχει ελάχιστο.

Στο $x = 4$ το $f(4) = 3$, δηλαδή στο σημείο $(4, 3)$ έχει μέγιστο.

δ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

B2. α) Θα πρέπει $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$.

Η εξίσωση $-x^2 + 6x + 7 = 0$ έχει

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 7 = 36 + 28 = 64$ και λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} \frac{-6+8}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ \frac{-6-8}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7 \end{cases}$$

X	$-\infty$	-1	7	$+\infty$	
$-x^2 + 6x + 7$	-	0	+	0	-

Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $A_f = [-1, 7]$

β) Τομή με τον άξονα $y'y$: $(x=0) f(0) = \sqrt{-0^2 + 6 \cdot 0 + 7} = \sqrt{7}$

Άρα το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το: $(0, \sqrt{7})$.

Τομή με τον άξονα $x'x$: $(y=0) f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 6x + 7} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής με τον άξονα x ' x είναι τα: $(-1,0)$ και $(7,0)$

$$\begin{aligned} \gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{27 - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{-x^2 + 6x + 7} - 4}{27 - 3x^2} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} - 4)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)}{3(9 - x^2)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{-x^2 + 6x + 7})^2 - 4^2}{3(3^2 - x^2)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 6x + 7 - 16}{3(3^2 - x^2)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 6x - 9}{3(3 - x)(3 + x)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x - 3)}{-3(x - 3)(3 + x)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)}{-3(3 + x)(\sqrt{-x^2 + 6x + 7} + 4)} = \\ &= \frac{-(3 - 3)}{-3(3 + 3)(\sqrt{-3^2 + 6 \cdot 3 + 7} + 4)} = \frac{0}{-18 \cdot 8} = 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $1 - 4x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 4x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}$, άρα $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

Το σημείο $(-1,0)$ ανήκει στην συνάρτηση άρα την επαληθεύει, οπότε θα ισχύει:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(-1)^2 - (-1) + \alpha}{1 - 4(-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \cdot 1 + 1 + \alpha}{1 - 4} = 0 \Leftrightarrow -2 + 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Θα απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης, οπότε παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και έχουμε: $1 - 4x^2 = (1 - 2x)(1 + 2x)$ και

$$-2x^2 - x + 1 = -2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = -(x+1)(2x-1) \text{ επειδή}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{1+3}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \\ \frac{1-3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{1 - 4x^2} = \frac{-(x+1)(2x-1)}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{(x+1)(1-2x)}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{x+1}{1+2x}$$

για κάθε $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$

Γ2. Θα βρούμε την

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{1+2x} \right)' = \frac{(x+1)'(1+2x) - (x+1) \cdot (1+2x)'}{(1+2x)^2} = \frac{1+2x - 2(x+1)}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{(1+2x)^2} < 0,$$

οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της και δεν έχει ακρότατα.

Γ3. Θα εξετάσουμε αν το σημείο $(-2,1)$ ανήκει στην συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{1+2x}$.

$$f(-2) = \frac{-2+1}{1+2(-2)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \neq 1, \text{ οπότε το σημείο δεν είναι σημείο επαφής.}$$

Έστω x_0 η τετμημένη του σημείου επαφής, τότε η εξίσωση εφαπτομένης θα έχει τύπο: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και βάζουμε όπου $x = -2$ και $y = 1$.

$$1 - \frac{x_0 + 1}{1 + 2x_0} = -\frac{1}{(1 + 2x_0)^2} (-2 - x_0)^{(1+2x_0)^2} \Leftrightarrow (1 + 2x_0)^2 - (1 + 2x_0)(x_0 + 1) = -(-2 - x_0) \Leftrightarrow$$

$1 + 4x_0 + 4x_0^2 - x_0 - 1 - 2x_0^2 - 2x_0 = 2 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$ δηλαδή έχουμε δύο εφαπτομένες που διέρχονται από το σημείο αυτό.

Για $x_0 = 1$, η εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ με

$$f(1) = \frac{1+1}{1+2 \cdot 1} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{1}{(1+2 \cdot 1)^2} = -\frac{1}{9} \quad \text{άρα} \quad y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$9y - 6 = -(x - 1) \Leftrightarrow 9y + x - 7 = 0$$

Για $x_0 = -1$, η εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$ με

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1+2 \cdot (-1)} = 0 \quad \text{και} \quad f'(-1) = \frac{1}{(1+2 \cdot (-1))^2} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \text{άρα}$$

$$y - 0 = -(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 1$$

Γ4.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{1+2x}, & x \neq \frac{1}{2} \\ 2x - \beta, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x+1}{1+2x} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1+2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x+1}{1+2x} = \frac{2+1}{1+2 \cdot 2} = \frac{3}{5}$$

ii) Για $x \neq \frac{1}{2}$ η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

για να είναι παντού συνεχής θα πρέπει να είναι συνεχής και για $x = \frac{1}{2}$,

οπότε θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \beta \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 1 - \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (x^3)' + \left(\frac{\alpha x^2}{2}\right)' - (36x)' + (10)' = 3x^2 + \alpha x - 36$

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2)' + (\alpha x)' - (36)' = 6x + \alpha$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + \alpha \cdot 1 - 36 = 3 + \alpha - 36 = \alpha - 33$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + \alpha = -6 + \alpha$

$3 \cdot f''(-1) + f'(1) = -39 \Leftrightarrow 3 \cdot (-6 + \alpha) + \alpha - 33 = -39 \Leftrightarrow$

$-18 + 3\alpha + \alpha - 33 = -39 \Leftrightarrow 4\alpha = -39 + 51 \Leftrightarrow \alpha = \frac{12}{4} \Leftrightarrow \alpha = 3$

Δ2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -4]$. Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4, 3]$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Δ3. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘		↗

Τ.Ε.

Η $f'(x)$ παρουσιάζει στο $x_0 = -1/2$ Τοπικό Ελάχιστο (ολικό) με τιμή:

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 36 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - 36 = \frac{3-6-144}{4} = -\frac{147}{4}$$

- Δ4.** Επειδή θέλουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της f' , θα βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ από την 2^η παράγωγο της f στο $x_0 = 1$.

$$\lambda = f''(1) = 6 \cdot 1 + 3 = 9$$

$$y = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 36 = -30$$

$$y = \lambda \cdot x + \beta \Leftrightarrow -30 = 9 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -39$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 9 \cdot x - 39$

- Δ5.** Οι τιμές $\frac{5}{4}$ και $\frac{5}{7}$ ανήκουν στο διάστημα $[-4, 3]$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Ισχύει: } \frac{5}{4} > \frac{5}{7} \xrightarrow{\text{Η } f \text{ γνησίως φθίνουσα}} f\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{5}{7}\right)$$

- Δ6.** Η $f'(x)$ παρουσιάζει στο $x_0 = -1/2$ Τοπικό Ελάχιστο (ολικό) με τιμή: $-\frac{147}{4}$

Από τον ορισμό του Ελαχίστου μιας συνάρτησης, θα έχουμε:

$$f'(x) \geq T.E. \Leftrightarrow f'(x) \geq f'\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) \geq -\frac{147}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 36 \geq -\frac{147}{4} \Leftrightarrow 3x^2 + 3x \geq -\frac{147}{4} + 36 \Leftrightarrow 3(x^2 + x) \geq \frac{-147 + 144}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + x) \geq \frac{-3}{4} \Leftrightarrow x^2 + x \geq -\frac{3}{3 \cdot 4} \Leftrightarrow x^2 + x \geq -\frac{1}{4}$$