ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Γλ1Α(α)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

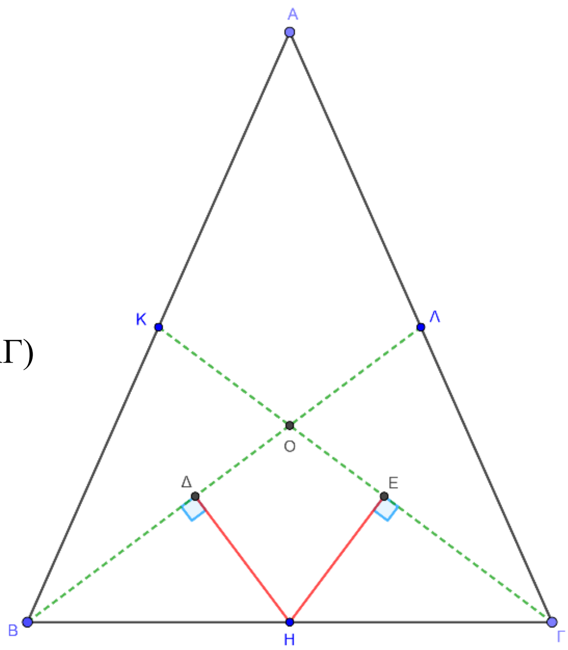
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδες 51-52 Θεώρημα IV

Α2. Σελίδα 49

Α3. **α) Λ**
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β



Β1. Φέρνουμε τις διαμέσους ΒΛ, ΓΚ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΛΓ :

- ΒΚ = ΓΛ (ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ)
- $K\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Lambda$ (ΑΒΓ ισοσκελές)
- ΒΓ = ΒΓ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ) είναι ίσα.

Οπότε και ΒΛ = ΓΚ.

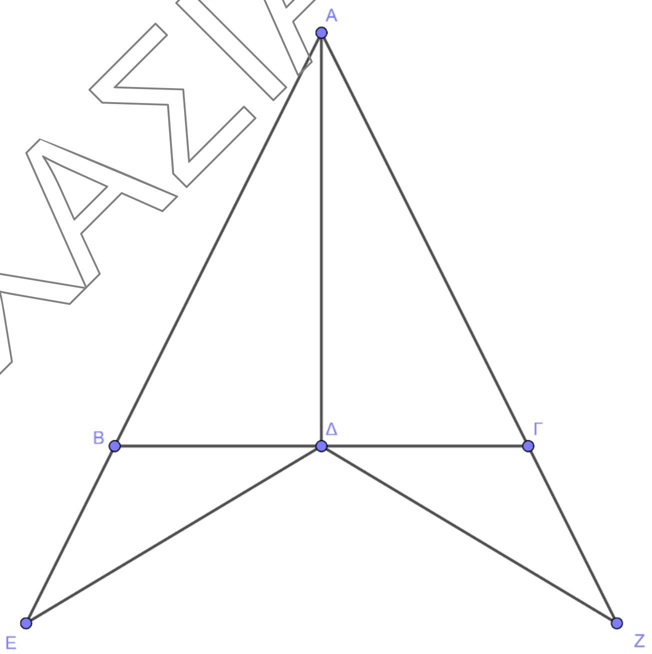
Β2. Από το ερώτημα **Β1** τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΒΛΓ είναι ίσα, άρα και οι γωνίες $O\widehat{B}\Gamma$ και $O\widehat{\Gamma}B$ είναι ίσες. Οπότε το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

Β3. Φέρνουμε από το σημείο Η τις αποστάσεις προς τις διαμέσους ΒΛ και ΓΚ. Έστω Δ και Ε οι προβολές του Η προς τις διαμέσους. Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΗ και ΗΕΓ προκύπτει:

- ΒΗ = ΗΓ (Η μέσο ΒΓ)
- $H\widehat{B}\Delta = H\widehat{\Gamma}E$ (το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές)

Οπότε από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (υποτείνουσα και οξεία γωνία αντίστοιχα μία προς μία ίσες) είναι ίσα. Άρα: ΗΔ = ΗΕ.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΔΖ έχουν:

- ΑΕ=ΑΖ (υπόθεση)
- $E\widehat{A}\Delta = Z\widehat{A}\Delta$ (ΑΔ διχοτόμος)
- ΑΔ=ΑΔ (κοινή πλευρά)

άρα από κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ) είναι ίσα.

Γ2. Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΔΖ είναι ίσα οπότε προκύπτει ότι:

- ΔΕ=ΔΖ (1) και
- $A\hat{E}\Delta = A\hat{Z}\Delta$, άρα και $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{Z}\Delta$ (2)

Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΔΓΖ είναι ισοσκελή (ΒΕ=ΒΔ και ΓΔ=ΓΖ) με:

$B\hat{\Delta}E = B\hat{E}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Delta}Z = \Gamma\hat{Z}\Delta$ (3).

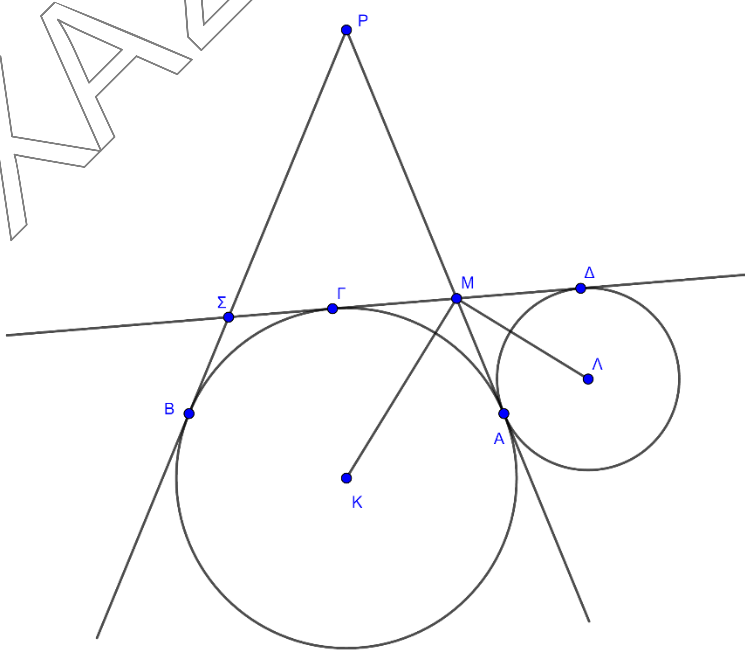
Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΔΓΖ έχουμε ότι:

- ΔΕ=ΔΖ (από (1))
- $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{Z}\Delta$ (από (2))
- $B\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$ (από (2) και (3))

  άρα είναι ίσα από το κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ).

Γ3. Έχει αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΒΕΔ, ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε ΒΔ=ΔΓ, άρα ΑΔ διάμεσος στο ΑΒΓ. Επειδή δίνεται ότι ΑΔ διχοτόμος, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Έχουμε ότι:

- ΜΑ=ΜΓ (εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (Κ,R))
- ΜΑ=ΜΔ (εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (Λ,ρ))

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι ΜΓ=ΜΔ, δηλαδή Μ μέσο του ΓΔ.

Δ2. Η διακεντρική ευθεία ΜΚ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων ΜΓ και ΜΑ ενώ η ΜΛ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων ΜΑ και ΜΔ. Οι γωνίες $\Gamma\widehat{M}A$ και $A\widehat{M}\Delta$ είναι παραπληρωματικές οπότε $\Gamma\widehat{M}A + A\widehat{M}\Delta = 180^o$ άρα $K\widehat{M}A + A\widehat{M}\Lambda = 90^o$ δηλαδή η γωνία $K\widehat{M}\Lambda$ είναι ορθή.

Δ3. Είναι:

- ΣΓ=ΣΒ
- ΓΜ=ΜΑ
- ΡΑ=ΡΒ (ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (Κ,R))

Οπότε:

ΡΣ+ΣΜ+ΡΜ=ΡΣ+ΣΓ+ΓΜ+ΡΜ=(ΡΣ+ΣΒ)+(ΜΑ+ΡΜ)=ΡΒ+ΡΑ=ΡΑ+ΡΑ=2ΡΑ=2ΡΒ.

Δ4. Από τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα ΒΣΓ, ΓΜΑ ισχύει ότι:

- ΒΓ<ΣΒ+ΣΓ $\Rightarrow$ ΒΓ<ΣΓ+ΣΓ οπότε ΒΓ<2ΣΓ (1)
- ΑΓ<ΓΜ+ ΜΑ $\Rightarrow$ ΑΓ<ΓΜ+ΓΜ οπότε ΑΓ<2ΓΜ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι:

ΒΓ+ΑΓ<2(ΣΓ+ΓΜ) $\Rightarrow$ ΒΓ+ΑΓ<2ΣΜ .