ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες 7

Α2. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ μπορεί να καταλήξει σε μία από τις περιπτώσεις της στήλης 3 του παρακάτω πίνακα ανάλογα με το τι είναι ο αριθμός α της στήλης **1** και ο αριθμός β της στήλης **2.**

Στήλη 1	**Στήλη 2**	**Στήλη 3**
	1. $\beta = 0$	**(i)** Μοναδική λύση
Α. $\alpha = 0$		
	2. $\beta \neq 0$	**(ii)** Αδύνατη
Β. $\alpha \neq 0$		
	3. $\beta \in \mathbb{R}$	**(iii)** Ταυτότητα

Συνδυάστε κατάλληλα ένα στοιχείο της στήλης **1** με ένα μόνο στοιχείο της στήλης **2** για να καταλήξουμε σε ένα μόνο συμπέρασμα της στήλης **3** το οποίο να ισχύει για όλες τις εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = 0$.

Μονάδες 3

Α3. Να μεταφέρετε συμπληρωμένες τις παρακάτω ισοδυναμίες ώστε να ισχύουν για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(α) $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$ ....

(β) $\alpha^2+\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow$ ....

(γ) $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow$ ....

(δ) $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow$ ....

Μονάδες 6

Α4. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Για κάθε θετικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2>\alpha$ >>

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό Αληθή ή Ψευδή δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για τους θετικούς αριθμούς α,β ισχύει $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

(β) Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.

(γ) Αν $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ τότε $\alpha=\beta$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(δ) Αν οι αριθμοί α,β είναι ετερόσημοι τότε ισχύει $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

(ε) Αν $\alpha+\beta<0$ τότε κατ΄ανάγκη $\alpha<0$ και $\beta<0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις :

$\kappa=\left|3-\sqrt{17}\right|+\left|5-\sqrt{17}\right|$ και $\lambda=x^2-(x-3)(x+3)$ όπου $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=9$

Μονάδες 6

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $|x+\kappa|=\sqrt{\lambda}$

Μονάδες 6

Β3. Να λύσετε την ανίσωση $|2x-1|\le \kappa+\sqrt{\lambda}$

Μονάδες 7

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $x^3-x^2+x-1=0$ αν $x\in[-1,1]$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί :

$$\alpha=\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\left(\sqrt{5}+1\right)^2-4\left(1-\sqrt{5}\right)+5 \quad , \quad \beta=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

και η παράσταση $A=|x-1|-|x-4|+5$ όπου ο πραγματικός αριθμός x ανήκει στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $A=2x$ και λύσετε την εξίσωση $\dfrac{4}{A-1}+\dfrac{2}{A+1}=\dfrac{A^2+2}{A^2-1}$

Μονάδες 8

Γ3. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x+2, y-1$ όπου $\alpha\le x\le\beta$ και $\alpha+1\le y\le 2\beta$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρός και το εμβαδόν του.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $x\in[\alpha,\beta]$ να λύσετε την εξίσωση $\left(\sqrt{x^2-2x+1}-|x-4|+5\right)^3=-27$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^4 x - \lambda^3 = x - \lambda$ (1), όπου $x \in \mathbb{R}$ και λ ένας πραγματικός αριθμός .

Δ1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να είναι αδύνατη και ότι η μοναδική της λύση είναι η $x_0 = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$

Μονάδες 8

Αν x_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) και λ_1, λ_2 οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα τότε :

Δ2. Να αποδείξετε ότι $|x_0| \le \dfrac{1}{2}$

Μονάδες 5

Δ3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[-3\lambda_1]{5}$ και $\sqrt{\lambda_2^{\,2} - \lambda_1^{\,3} + 1}$

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε την τιμή του x_0 αν ισχύει : $\lambda_2 + \sqrt{16x_0^{\,2} + 8x_0 + 1} = 1 - |16x_0^{\,2} - 1|$

Μονάδες 5