ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 4 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Βιβλίο, 3.1 παράγραφος

Α.2.

α. Σ

β. Λ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Λ

Α.3. α. **Ψ**

β. Για τα διανύσματα $\vec{i}=(1,0)$ και $\vec{j}=(0,1)$ ισχύει $|\vec{i}|=|\vec{j}|$, όμως $\vec{i}\neq\vec{j}$

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έστω $\mathrm{A}(x,y)$ τυχαίο σημείο της γ_1.

Τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{cases}x=\lambda+1\\ y=\lambda+3\end{cases}\Rightarrow x-1=y-3\Rightarrow y=x+2$$

Οπότε η γραμμή γ_1 είναι ευθεία με εξίσωση $\gamma_1: y=x+2$.

Β.2. Αφού $\vec{v}\,//\,\gamma_2$, θα ισχύει:

$$\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\vec{v}} \Rightarrow \lambda_{\gamma_2} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \lambda_{\gamma_2} = -1 .$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{I}(-2,-2)$ είναι:

$$\gamma_2 : y+2 = -1(x+2) \Leftrightarrow \gamma_2 : y = -x+4$$

Β.3. Το αεροπλάνο που κινείται στην ευθεία γ_1 θα περάσει πιο κοντά από το αεροδρόμιο Αθηνών διότι $d(\mathrm{O},\gamma_1) < d(\mathrm{O},\gamma_2)$:

$$d(\mathrm{O},\gamma_1) = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d(\mathrm{O},\gamma_2) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Β.4. Σημείο τομής των ευθειών γ_1, γ_2:

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ x+2 = -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής είναι το $\mathrm{N}(-3,-1)$.

Είναι $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (-3,-1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = (-2,-2)$ και

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{ON}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

οπότε το εμβαδόν είναι

$$(\mathrm{ION}) = \frac{\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{ON})\right|}{2} = 2\,\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

$$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=1$$

$$\Leftrightarrow 3\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-\left|\vec{\beta}\right|^2=1$$

$$\Leftrightarrow 3+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-4=1$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}=2$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}=1$$

Επίσης

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

άρα $\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Γ.2

Έχουμε

$$2p=2\vec{\beta}\left(\vec{\beta}-2\vec{a}\right)=2\vec{\beta}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}=2\cdot 4-4\cdot 1=8-4=4$$

Οπότε

$$p=2 \text{ και } C_1: y^2=4x$$

Άρα Ε$\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{2}{2},0\right)=(1,0)$ και (δ): $x=-\frac{p}{2}=-\frac{2}{2}=-1$.

Ακόμη

$$x^2+y^2-|\vec{\beta}|\left(x+4\vec{a}\vec{\beta}y\right)+15=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2\left(x+4y\right)-15=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-8y-15=0$$

Συνεπώς

$$-\frac{A}{2}=-\frac{-2}{2}=1 \text{ και } -\frac{B}{2}=-\frac{-8}{2}=4$$

άρα $\mathrm{K}(1,4)$.

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-8)^2-4\cdot 15}}{2}=\sqrt{2}$$

Γ.3.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $\mathrm{A}(1,2)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): 2y=2(x+1) \Leftrightarrow y=x+1 \Leftrightarrow x-y-1=0.$$

Για να εφάπτεται η ευθεία ε στον κύκλο C_2 αρκεί να ισχύει:

$$d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho.$$

Πράγματι

$$d(\mathrm{K},\varepsilon)=\frac{|1-4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho.$$

Γ.4.

$$(E\mathrm{K})=\sqrt{(1-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{0+16}=4>\sqrt{2}=\rho$$

συνεπώς το σημείο Ε είναι εξωτερικό του C_2.

Η μέγιστη απόσταση του Ε από τον C_2 ισούται με

$$d_{\max}=(\mathrm{EK})+\rho=4+\sqrt{2}$$

και η ελάχιστη απόσταση του Ε από τον C_2 ισούται με

$$d_{\min}=(\mathrm{EK})-\rho=4-\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Αναγκαία συνθήκη είναι

$$\lambda^4+\lambda^2=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2\left(\lambda^2+1\right)=-\lambda\left(\lambda^2+1\right)+2\left(\lambda^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2+1\right)\left(\lambda^2+\lambda-2\right)=0$$

$$\lambda=-2 \text{ ή } \lambda=1$$

Για $\lambda=-2$, η εξίσωση γίνεται

$$20x^2+20y^2+60x-40y+320=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+3x-2y+16=0$$

Είναι:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=-51<0$$

οπότε δεν παριστάνει κύκλο.

Για $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται

$$2x^2+2y^2-12x-16y+32=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-8y+16=0$$

Είναι:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=36>0$$

οπότε παριστάνει κύκλο C

Δ.2. Για $\lambda=1$, είναι: $C: x^2+y^2-6x-8y+16=0$

α. Κέντρο $\Theta(3,4)$ και ακτίνα $\rho=3$.

β. Είναι $$d(\Theta,\eta)\frac{|3\cdot3+4\cdot4+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8$$

Επομένως για την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση, αντίστοιχα έχουμε:

$$d_{\min}=d(\Theta,\eta)-\rho=8-3=5$$

και: $$d_{\max}=d(\Theta,\eta)+\rho=8+3=11$$

γ. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι:

$$\varepsilon_1 : x = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$$

Είναι:

$$d\left(\Theta, \varepsilon_1\right) = \frac{|3+0+0|}{\sqrt{1+0}} = 3 = \rho$$

Επομένως η $\varepsilon_1 : x = 0$ είναι μια εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Είναι:

$$d\left(\Theta, \varepsilon_2\right) = \frac{|3\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Αναγκαία συνθήκη είναι:

$$d\left(\Theta, \varepsilon_2\right) = \rho$$

$$\Leftrightarrow |3\lambda - 4| = 3\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{24}$$

Επομένως η $\varepsilon_2 : y = \frac{7}{24}x$ είναι μια εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Επειδή $\mathrm{K\Lambda} = 6 = 2\rho$, η ΚΛ θα είναι διάμετρος του κύκλου.

Οπότε το μέσο της ΚΛ θα είναι το κέντρο Θ του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$.

Επομένως η ΟΘ διάμεσος του τριγώνου ΟΚΛ.

Άρα

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}\right| = \left|2\overrightarrow{\mathrm{O\Theta}}\right| = 2\sqrt{3^2 + 4^2} = 10$$