



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141.
A2. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό
A3. $\alpha - 2$, $\beta - 3$, $\gamma - 4$, $\delta - 1$

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(1) = 0 & \left\{ \begin{array}{l} -1^3 + \alpha \cdot 1^2 + (\beta - 1) \cdot 1 + 7 = 0 \\ P(2) = -7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 + \alpha \cdot 2^2 + (\beta - 1) \cdot 2 + 7 = -7 \\ -1 + \alpha + \beta - 1 + 7 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = -5 \\ -8 + 4\alpha + 2\beta - 2 + 7 = -7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = -5 \\ 4\alpha + 2\beta = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = -5 \\ 2\alpha + \beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\beta - 5 \\ 2(-\beta - 5) + \beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\beta - 5 \\ -2\beta - 10 + \beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\beta - 5 \\ \beta = -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \beta = -8 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

B2. Έχουμε, $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 9x + 7$.

Η $x=1$ είναι ρίζα του $P(x)$, από σχήμα Horner έχουμε:

-1	3	-9	7	1
	-1	2	-7	
-1	2	-7	0	

Έτσι $P(x) = (x-1)(-x^2 + 2x - 7)$

Η $-x^2 + 2x - 7 = 0$ είναι αδύνατη στο \mathbb{R} γιατί
 $\Delta = 4 - 4(-1)(-7) = 4 - 28 = -24 < 0$

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	○	+
$-x^2 + 2x - 7$	-	-	-
$P(x)$	+	-	-

Άρα, η $P(x) > 0$ έχει λύση για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

B3. Εκτελούμε την διαίρεση :

$$\begin{array}{r|l}
 -x^3 + 3x^2 - 9x + 7 & x^2 - 1 \\
 x^3 - x & -x + 3 \\
 \hline
 3x^2 - 10x + 7 & \\
 -3x^2 + 3 & \\
 \hline
 -10x + 10 &
 \end{array}$$

άρα $\pi(x) = -x + 3$ και η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι

$$-x^3 + 3x^2 - 9x + 7 = (x^2 - 1)(-x + 3) + (-10x + 10).$$

B4. Έχουμε, $\pi(x+1) = -(x+1) + 3 = -x - 1 + 3 = -x + 2$

$$\text{Άρα, } \pi(\pi(x+1)) = \pi(-x+2) = -(-x+2) + 3 = x - 2 + 3 = x + 1$$

Οπότε,

$$P(x) = \pi(\pi(x+1)) - 10 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 9x + 7 = x + 1 - 10 \Leftrightarrow$$

$$-x^3 + 3x^2 - 10x + 16 = 0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ του σταθερού όρου. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner για $x = 2$ έχουμε

-1	3	-10	16	2
	-2	2	-16	
-1	1	-8	0	

Άρα, η εξίσωση γίνεται:

$$-x^3 + 3x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(-x^2 + x - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } -x^2 + x - 8 = 0 \text{ αδύνατη αφού } \Delta = 1 - 4(-1)(-8) = 1 - 32 = -31 < 0$$

Επομένως, μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f ορίζεται για $x > 0$ και $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f = (0, e)$.

Για να βρούμε σημεία τομής με τον $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = \ln 1 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το $A(1, 0)$.

Γ2. Η g ορίζεται για $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ (1) και

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$
 (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = (-1, 1)$.

Για κάθε $x \in D_g$ έχουμε $-x \in D_g$ και

$$g(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

Επομένως, η g είναι περιττή στο D_g .

Γ3. Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1 - \ln x) - \ln\left(1 - \ln \frac{1}{x}\right) = \ln(1 - \ln x) - \ln(1 - \ln x^{-1}) =$$

$$\ln(1 - \ln x) - \ln(1 + \ln x) = \ln\left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right) = g(\ln x)$$

Γ4. 1^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = g(\ln x) \stackrel{\Gamma 3}{\Leftrightarrow} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln 1 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

2^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = g(\ln x) \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) + \ln\left(1 - \ln \frac{1}{x}\right) = \ln \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \Leftrightarrow$$

$$\ln(1 - \ln x) + \ln(1 - \ln x^{-1}) = \ln \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) + \ln(1 + \ln x) = \frac{\ln(1 - \ln x)}{1 + \ln x} \Leftrightarrow$$

$$\ln(1 - \ln^2 x) = \ln \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \stackrel{-1}{\Leftrightarrow} 1 - \ln^2 x = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \Leftrightarrow (1 - \ln^2 x)(1 + \ln x) = 1 - \ln x \Leftrightarrow$$

$$(1 - \ln x)(1 + \ln x)^2 - (1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \ln x)(1^2 + 2\ln x + \ln^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \ln x)(2\ln x + \ln^2 x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(2 + \ln x)(1 - \ln x) = 0$$

Άρα,

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \stackrel{-1}{\Leftrightarrow} x = 1$$

ή

$$2 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2} \text{ απορρίπτεται διότι}$$

$$\frac{1}{e^2} \notin \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

ή

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{1-1} \Leftrightarrow x = e \text{ απορρίπτεται διότι } e \notin \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

Οπότε, $x=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $\eta\mu\alpha = \omega$, με $-1 \leq \omega \leq 1$ και έχουμε:

$$2\omega^2 + 3\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \text{ ή } \omega = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Για } \omega = -1 \text{ έχουμε } \eta\mu\alpha = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = \begin{cases} 2κπ - \frac{\pi}{2} \\ 2κπ + \frac{3\pi}{2} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Επειδή } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ τότε } \alpha_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Για } \omega = -\frac{1}{2} \text{ έχουμε } \eta\mu\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \alpha = \begin{cases} 2κπ - \frac{\pi}{6} \\ 2κπ + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Επειδή } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ τότε } \alpha_2 = \frac{7\pi}{6}, \alpha_3 = \frac{11\pi}{6}$$

Δ2. Έχουμε,

$$-1 \leq \eta\mu\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu\alpha \leq 2 \Leftrightarrow 2 - 2 \leq 2\eta\mu\alpha + 2 \leq 2 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2\eta\mu\alpha + 2 \leq 4$$

Για να είναι εκθετική η f πρέπει :

$$\begin{cases} 2\eta\mu\alpha + 2 > 0 & (1) \\ 2\eta\mu\alpha + 2 \neq 1 & (2) \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $2\eta\mu\alpha + 2 \geq 0$, άρα για να έχει λύση η (1) πρέπει

$$2\eta\mu\alpha + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha \neq -1 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha + 2 \neq 1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{7\pi}{6} \text{ και } \alpha \neq \frac{11\pi}{6}$$

Άρα, για $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{7\pi}{6}$ και $\alpha \neq \frac{11\pi}{6}$ η f είναι εκθετική.

Δ3. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τότε

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow (2\eta\mu\alpha + 2)^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha + 2 = 4 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = 1$$

Άρα, ο τύπος της f είναι $f(x) = 4^x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Έχουμε,

$$f(\sin x) + 2f(-\sin x) = f(\log_4 3) \Leftrightarrow 4^{\sin x} + 2 \cdot 4^{-\sin x} = 4^{\log_4 3} \Leftrightarrow 4^{\sin x} + 2 \cdot 4^{-\sin x} = 3 \Leftrightarrow 4^{\sin x} + 2 \cdot 4^{-\sin x} - 3 = 0$$

Θέτουμε $4^{\sin x} = \omega > 0$ και η εξίσωση γίνεται :

$$\omega + 2\omega^{-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 1 \text{ ή } \omega_2 = 2$$

Για $\omega_1 = 1$ έχουμε:

$$4^{\sin x} = 1 \Leftrightarrow 4^{\sin x} = 4^0 \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Για $\omega_2 = 2$ έχουμε:

$$4^{\sin x} = 2 \Leftrightarrow 4^{\sin x} = 4^{\frac{1}{2}} \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

ii. Για $x > 0$ έχουμε :

$$f(\ln x) + f(2 \ln x) < \ln e^{f\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow 4^{\ln x} + 4^{2 \ln x} < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4^{\ln x} + 4^{2 \ln x} < 2 \Leftrightarrow$$

$$4^{\ln x} + 4^{2 \ln x} - 2 < 0 \Leftrightarrow (4^{\ln x})^2 + 4^{\ln x} - 2 < 0$$

Θέτουμε $4^{\ln x} = \omega > 0$ και η ανίσωση γίνεται : $\omega^2 + \omega - 2 < 0$

ω	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$\omega^2 + \omega - 2$			-		

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο παραπάνω πίνακα. Επομένως έχουμε $\omega^2 + \omega - 2 < 0 \Leftrightarrow \omega \in (0,1)$. Άρα,

$$0 < 4^{\ln x} < 1 \Leftrightarrow 4^{\ln x} < 4^0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Άρα, η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (0,1)$.

iii. Έχουμε,

$$\begin{cases} \log_4 f(x^2) + \log_4 f(y^2) = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 4^{x^2} + \log_4 4^{y^2} = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (7-x)^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 14x + 24 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 3 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(4,3)$ και $(3,4)$.