ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 60

Α2. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

Α3. **1.** Γ **2.** Β **3.** Ζ **4.** Ε

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f ως πολυωνυμική ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα το πεδίο ορισμού της είναι $Df = \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Έτσι αν $x \in Df$ και το $-x \in Df$.

Θέτουμε όπου x το $-x$ και έχουμε:

$$f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 = \alpha x^4 + \beta x^2 = f(x)$$

Άρα η f είναι άρτια.

Β2. Αφού η f διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2,4)$ και $\Delta(1,1)$ τότε:

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 2^4 + \beta \cdot 2^2 = 4 \\ \alpha \cdot 1^4 + \beta \cdot 1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha + 4\beta = 4 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4\alpha - \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow -3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Για $\alpha = 0$ η $\alpha + \beta = 1$ γίνεται $0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$

Β3. Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση η συνάρτηση είναι:

Γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -3]$

Γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-3, +\infty)$

Για $x = -3$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(-3) = 1$

Β4. Αφού η C_3 είναι μετατόπιση της $f(x) = x^2$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η C_1 τότε βλέπουμε ότι είναι μετατοπισμένη κατά 2 προς τα δεξιά και 2 προς τα επάνω. Άρα η συνάρτηση που περιγράφει η C_3 είναι η $f(x-2) + 2 = (x-2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 4 + 2 = x^2 - 4x + 6 = g(x)$.

Άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της $h(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε,

$$A(x) = \sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$= (\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$= \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = -\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$= -(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = -1$$

Γ2. Έχουμε,

$$\bullet\ \sigma\upsilon\nu(3\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi - x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet\ \sigma\upsilon\nu(3\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet\ \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet\ \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x$$

$$\bullet\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$$

Άρα,

$$B(x)=\frac{(-\sigma\upsilon\nu x)^2+(-\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)+(-\sigma\upsilon\nu x)^2}{\sigma\varphi x\cdot\varepsilon\varphi x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1}=\sigma\upsilon\nu^2 x$$

Γ3. Η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x-(-1)=\frac{7}{2}\eta\mu x\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x+2=7\eta\mu x$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1-\eta\mu^2 x\right)+2=7\eta\mu x\Leftrightarrow 2-2\eta\mu^2 x+2-7\eta\mu x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x+7\eta\mu x-4=0$$

Θέτουμε $\eta\mu x=\omega,\ \omega\in[-1,1]$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$2\omega^2+7\omega-4=0\Leftrightarrow\omega=\frac{-7+9}{4}\ \text{ή}\ \omega=\frac{-7-9}{4}$$
$$\Leftrightarrow\omega=\frac{2}{4}\ \text{ή}\ \omega=-\frac{16}{4}\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ \omega=-4$$

Έχουμε ότι,

$$\eta\mu x=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ \eta\mu x=-4\ (\text{απορρίπτεται})$$

Οπότε, $\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x=\begin{cases}2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ 2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}\quad \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Όμως οι λύσεις πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[0,2\pi]$, δηλαδή:

- $x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow 0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\le 2\pi$

  $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\le 2\kappa\pi\le\frac{11\pi}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{11}{12}$

Όμως $\kappa\in\mathbb{Z}$, άρα $\kappa=0$ και η λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{\pi}{6}$.

- $x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow 0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\le 2\pi$

  $\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6}\le 2\kappa\pi\le\frac{7\pi}{6}\Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{7}{12}$

Όμως $\kappa\in\mathbb{Z}$, άρα $\kappa=0$ και η λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{5\pi}{6}$.

Γ4. Για κάθε $x\ne\frac{\kappa\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε:

$$B^2(x)+B(x)>B\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2A(x)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x>\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2(-1)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x>\eta\mu^2x-2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x>1-\sigma\upsilon\nu^2x-2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2+2\sigma\upsilon\nu^2x+1>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x+1\right)^2>0,\ \text{που ισχύει για κάθε } x\ne\frac{\kappa\pi}{2},\ \text{με } \kappa\in\mathbb{Z},\ \text{διότι } \sigma\upsilon\nu^2x+1\ne0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • Επειδή η Cf διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ ισχύει: $f(0)=1 \Rightarrow \gamma=1$

Αν θεωρήσουμε $g(x)=(\alpha-1)\cdot ημ\left(\dfrac{\pi}{2\beta}x\right)$ τότε παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό $|\alpha-1|$. Άρα η γραφική παράσταση της f, η οποία είναι μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της g, θα παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό $|\alpha-1|+1$.

• $\max f=3 \Leftrightarrow |\alpha-1|+\gamma=3 \overset{\gamma=1}{\Rightarrow} |\alpha-1|+1=3 \Rightarrow |\alpha-1|=2$

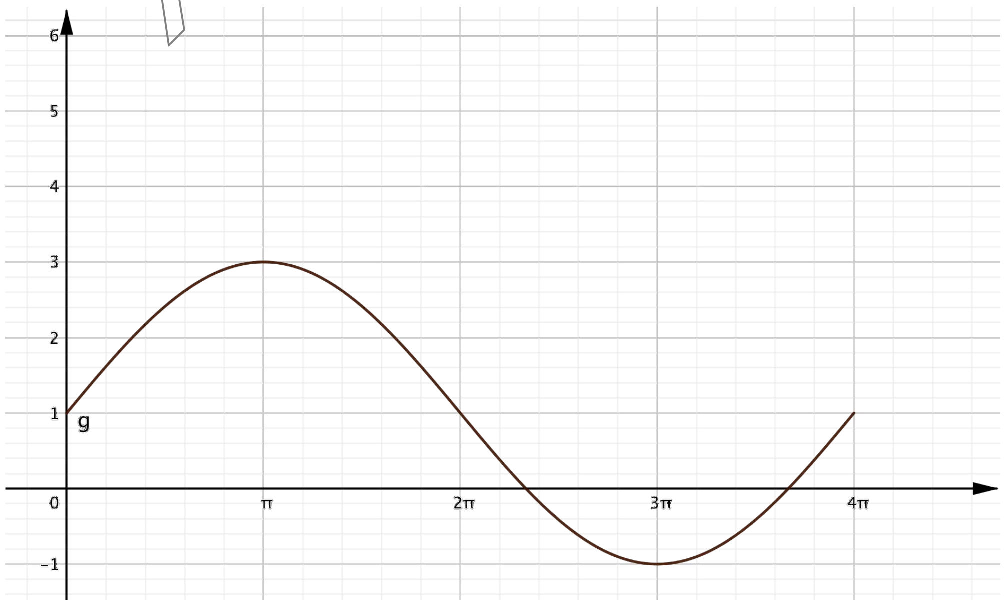
$\alpha-1=2$ ή $\alpha-1=-2$

$\alpha=3$ δεκτή $\alpha=-1$ απορρίπτεται αφού $\alpha>0$

α=3 δεκτή α=−1 απορρίπτεται αφού α>0

• $T=4\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2\beta}}=4\pi \Leftrightarrow 4\beta=4\pi \Leftrightarrow \beta=\pi$, άρα $f(x)=2ημ\left(\dfrac{x}{2}\right)+1$

Δ2. Αν $g(x)=2ημ\left(\dfrac{x}{2}\right)$, τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν μετατοπίσουμε την f μία μονάδα προς τα πάνω.



Δ3. $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}<\pi$ και επειδή η ημx είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ άρα

$1>\eta\mu\frac{5\pi}{7}>\eta\mu\frac{6\pi}{7}>0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]$ τελικά προκύπτει $f\left(\eta\mu\frac{5\pi}{7}\right)>f\left(\eta\mu\frac{6\pi}{7}\right)$.

Δ4.
- $f(0)=1$
- $f\left(\frac{25\pi}{3}\right)=2\eta\mu\left(\frac{25\pi}{6}\right)+1=2\eta\mu\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\eta\mu\frac{\pi}{6}+1=2\cdot\frac{1}{2}+1=2$

άρα το σύστημα γίνεται $\begin{cases} y^2-3x^2=4 \\ y=x^2 \end{cases}$

$y^2-3x^2=4 \overset{y=x^2}{\Rightarrow} \left(x^2\right)^2-3x^2-4=0 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0$

Θέτω $x^2=\omega$, $\omega\geq 0$, άρα $\omega^2-3\omega-4=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25$

άρα $\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm 5}{2}$, $\omega_1=4$ δεκτή, $\omega_2=-1$ απορρίπτεται

$x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

- αν $x=2$ τότε $y=2^2=4$, άρα $(x,y)=(2,4)$
- αν $x=-2$ τότε $y=(-2)^2=4$, άρα $(x,y)=(-2,4)$