

**ΤΑΞΗ:** Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 19 Απριλίου 2017

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Απόδειξη (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 175)
- A2. α)** Λάθος. [πχ. Αν  $P(x) = -3x^3 + 4x^2 - 2$  ( $3^{\text{ου}}$  βαθμού) και  $Q(x) = 3x^3 + 7x + 5$  ( $3^{\text{ου}}$  βαθμού), τότε είναι  $P(x) + Q(x) = 4x^2 + 7x + 3$  ( $2^{\text{ου}}$  βαθμού)].
- β)** Λάθος. [πχ. Για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2$  είναι  $f(1) = 1 < 4 = f(2)$  αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  αφού για  $-2 < -1$  είναι  $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$ ].
- γ)** Σωστό. (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 44)
- δ)** Λάθος. (Ο  $\log x$  δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές του  $x$ ).
- ε)** Λάθος. [Είναι  $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ].

**ΘΕΜΑ Β**

- B1.** Είναι: •  $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\left(\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta \end{aligned}$$
- $\sigma\varphi(\pi - \theta) = -\sigma\varphi\theta$
- $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \epsilon\varphi\theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

$$\bullet \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta$$

$$\bullet \varepsilon\varphi(2\pi + \theta) = \varepsilon\varphi\theta$$

Επομένως, η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\varphi(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(2\pi + \theta)}$$

$$= \frac{-(-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot (-\eta\mu\theta) \cdot (-\sigma\varphi\theta) \cdot \varepsilon\varphi\theta}{(-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot (-\eta\mu\theta) \cdot \sigma\varphi\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta} = 1$$

**B2.** Για τη συνάρτηση  $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$  έχουμε:

$$\bullet \max f = |2| = 2$$

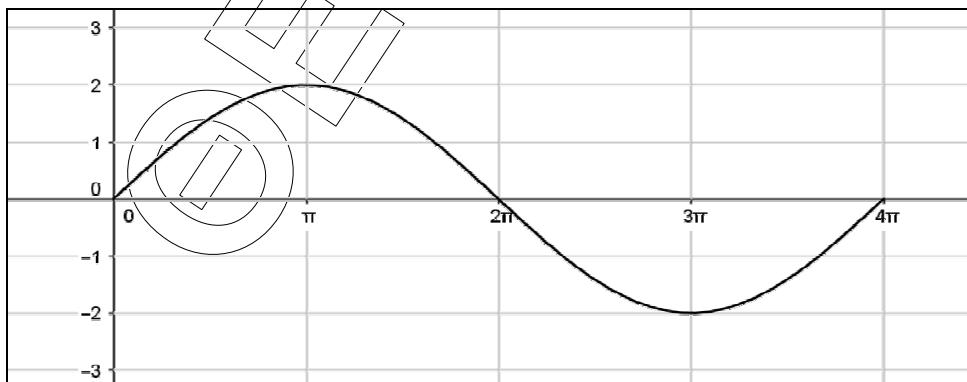
$$\bullet \min f = -|2| = -2$$

$$\bullet \text{περίοδος } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Ο πίνακας τιμών για το διάστημα μιας περιόδου  $[0, 4\pi]$  είναι:

$x$	0	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\eta\mu\frac{x}{2}$	0	1	0	-1	0
$2 \cdot \eta\mu\frac{x}{2}$	0	2	0	-2	0

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο  $[0, 4\pi]$  είναι:



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

**B3.**  $f(x) = A \Leftrightarrow 2 \cdot \eta\mu \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right), & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**B4.** Επειδή οι αριθμοί  $\frac{5\pi}{4}$  και  $\frac{11\pi}{6}$  ανήκουν στο διάστημα  $[\pi, 3\pi]$  όπου η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει:

$$\frac{5\pi}{4} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right) > f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Αφού το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού θα πρέπει:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

- Για  $\lambda = 1$  έχουμε  $P(x) = x^2 - 7x + 6$ , οπότε το  $P(x)$  είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού και άρα η τιμή  $\lambda = 1$  απορρίπτεται.
- Για  $\lambda = -1$  έχουμε  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$ , οπότε το  $P(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού και άρα η τιμή  $\lambda = -1$  είναι δεκτή.

Για  $\lambda = -1$

**Γ2.** Είναι  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$ .

Θέλουμε να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  με τον άξονα  $x'$ , οπότε αρκεί να λύσουμε

$$\text{την εξίσωση: } P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του  $P(x)$  οι  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για  $x = 1$  έχουμε:

2	-1	-7	6	$x = 1$
↓	2	1	-6	
2	1	-6	0	

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
 Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

Επομένως:

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = -2$$

οπότε, τα σημεία τομής είναι τα  $A(1,0)$ ,  $B\left(\frac{3}{2},0\right)$ ,  $\Gamma(-2,0)$

**Γ3. α)** Αφού το πολυώνυμο  $Q(x)$  έχει παράγοντα το  $x-2$  θα ισχύει ότι:

$$Q(2) = 0 \Leftrightarrow 8 - 4(\mu+1) + 2(\mu-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$8 - 4\mu - 4 + 2\mu - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\mu + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Για  $\mu = 2$  έχουμε  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ , ενώ η διαίρεση του  $Q(x)$  δια του  $x+3$  γίνεται ως εξής:

$x^3 - 3x^2 + x + 2$	$x+3$
$-x^3 - 3x^2$	$x^2 - 6x + 19$
$-6x^2 + x + 2$	
$6x^2 + 18x$	
$19x + 2$	
$-19x - 57$	
$-55$	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:  $Q(x) = (x+3)(x^2 - 6x + 19) - 55$

**β.**  $\frac{x^2 - 6x + 19}{Q(x) + 55} + \frac{2x^2 + x - 6}{P(x)} < 0$  (1)

Από **Γ3.α)** έχουμε  $Q(x) = (x+3)(x^2 - 6x + 19) - 55$ ,

επομένως  $Q(x) + 55 = (x+3)(x^2 - 6x + 19)$

Από **Γ2.** έχουμε  $P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 6)$

Πρέπει:  $(x+3)(x^2-6x+19) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ , αφού  $x^2-6x+19 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ( $\Delta < 0$ )

Επίσης πρέπει  $(x-1)(2x^2+x-6) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, -2, \frac{3}{2}$

Για  $x \neq -3, -2, 1, \frac{3}{2}$  η ανίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{x^2-6x+19}{(x+3)(x^2-6x+19)} + \frac{2x^2+x-6}{(x-1)(2x^2+x-6)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{(x+3)(x-1)} + \frac{x+3}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1+x+3}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x+2}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+3)(x-1) < 0$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$1$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2(x+1)$	-	-	-	0	+	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
Γινόμενο	-	+	+	0	-	+	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^x$  ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$  όταν:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{\ln \alpha} > 0 \\ \ln \alpha \neq 0 \\ \alpha > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln \alpha - 1}{\ln \alpha} > 0 \\ \ln \alpha \neq \ln 1 \\ \alpha > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln \alpha (\ln \alpha - 1) > 0 \\ \alpha \neq 1 \\ \alpha > 0 \end{array} \right.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

$\alpha$	$-\infty$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln \alpha$			-	0	+
$\ln \alpha - 1$			-	0	+
$\ln \alpha (\ln \alpha - 1)$		+	+	-	0

Από τον παραπάνω πίνακα προσημίου έχουμε ότι:  $\alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty)$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  όταν:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln \alpha} > 1 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\ln \alpha} > 0 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \alpha < 0 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in (0,1)$$

Δ2. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f(-x) \cdot f(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^{-x} \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^{-x+x} = 1$$

$$\text{Άρα, } f(-x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Από την παραπάνω σχέση για } x = \frac{1}{2} \text{ έχουμε: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Άρα,

$$f(e^x) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) > 1 \Leftrightarrow f(e^x) \cdot \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} > 1 \Leftrightarrow f(e^x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\ln 2$$

Δ3. α) Έχουμε:

$$α = \frac{1}{2} \log_3 81 + \log_3 15 - \log_3 5 - e^{\frac{1}{2} \ln 9} + e^{-\frac{\ln 2}{\ln 4}}$$

$$= \log_3 81^{\frac{1}{2}} + \log_3 \frac{15}{5} - e^{\ln 9^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{\ln 2}{\ln 2}} = \log_3 \sqrt{81} + \log_3 3 - \sqrt{9} + e^{-\frac{\ln 2}{2 \ln 2}}$$

$$= \log_3 9 + 1 - 3 + e^{-\frac{1}{2}} = 2 - 2 + e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Άρα,

$$f(x) = \left( 1 - \frac{1}{\ln e^{-\frac{1}{2}}} \right)^x = \left( 1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}} \right)^x = (1+2)^x = 3^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β)

α' τρόπος

Έχουμε

$$\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(2x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} < 1 + \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left( \left( \frac{3}{2} \right)^x \right)^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^x - 1 < 0$$

Θέτουμε  $\left( \frac{3}{2} \right)^x = \omega > 0$  και η ανίσωση γίνεται:

$$2\omega^2 - \omega - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < 1 \Leftrightarrow 0 < \left( \frac{3}{2} \right)^x < 1 \Leftrightarrow \left( \frac{3}{2} \right)^x < \left( \frac{3}{2} \right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

β' τρόπος

Έχουμε

$$\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(2x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2 < \frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 > 0$$

Θέτουμε  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \omega > 0$  και η ανίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + \omega - 2 > 0 \stackrel{\omega > 0}{\Leftrightarrow} \omega > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

**γ' τρόπος**

Έχουμε

$$\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(2x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} < \frac{2^{2x}}{2^x \cdot 3^x} + \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 3^x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} < 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 < 0$$

Θέτουμε  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \omega > 0$  και η ανίσωση γίνεται:

$$2\omega^2 - \omega - 1 < 0 \stackrel{\omega > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \omega < 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

**δ' τρόπος**

Έχουμε  $\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$



$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 3^{2x} - 3^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} - 3^{2x}) + (2^x \cdot 3^x - 3^{2x}) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3^x)(2^x + 3^x) + 3^x(2^x - 3^x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3^x)(2^x + 2 \cdot 3^x) > 0$$

$$2^x + 2 \cdot 3^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \nearrow$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

γ) Έχουμε:  $(2 + \sqrt{f(1)})(2 - \sqrt{f(1)}) = 2^2 - \sqrt{f(1)}^2 = 4 - f(1) = 4 - 3 = 1$

οπότε,  $2 - \sqrt{f(1)} = \frac{1}{2 + \sqrt{f(1)}}$  και η εξίσωση γίνεται:

$$(2 + \sqrt{f(1)})^x + (2 - \sqrt{f(1)})^x = 4 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{f(1)})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{f(1)})^x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \sqrt{f(1)})^{2x} + 1 = 4(2 + \sqrt{f(1)})^x \stackrel{(f(1)=3)}{\Leftrightarrow} ((2 + \sqrt{3})^x)^2 - 4(2 + \sqrt{3})^x + 1 = 0$$

Θέτουμε  $(2 + \sqrt{3})^x = y > 0$  και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left( y = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} \quad \text{ή} \quad y = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad y = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^1 \quad \text{ή} \quad (2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ