ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δείξετε ότι για κάθε $z,w \in C$ ισχύει ότι:

$$|z+3w| + |2z+w| + |4z+3w| \le 6|z+w| + 3|w| + |z|$$

2ο ΘΕΜΑ

Έστω $z \in C$ με $z \neq 0$ και $|2z-i| = |z-2i|$. Δείξτε ότι

α) $|z| = 1$ β) $w = z + \frac{1}{z} \in R$ γ) $4 \le |z-3-4i| \le 6$

3ο ΘΕΜΑ

Να βρεθούν τα όρια α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

4ο ΘΕΜΑ

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $f^2(x) \le f(x)\cdot f(10-x)$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

5ο ΘΕΜΑ

Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση συνεχής τέτοια ώστε $(fof)(x)=x,\ x\in R$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_o\in R$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = x_o$.

6ο ΘΕΜΑ

Έστω $f:R\to R$ με $f(f(x)) = x^2-x+1$, για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι f(1)=1.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$|z+3w| = |(z+w)+2w| \le |z+w| + 2|w|$

$|2z+w| = |(z+w)+z| \le |z+w| + |z|$

$|4z+3w| = |4z+4w-w| = |4(z+w)-w| \le 4|z+w| + |w|$

προσθέτω κατά μέλη και έχω

$|z+3w| + |2z+w| + |4z+3w| \le 6|z+w| + 3|w| + |z|$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Είναι $|2z-i| = |z-2i| \Leftrightarrow |2z-i|^2 = |z-2i|^2 \Leftrightarrow$

$(2z-i)\ (2\bar{z}+i) = (z-2i)\ (\bar{z}+2i)$

$\Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2zi - 2\bar{z}i - i^2 = z\bar{z} + 2zi - 2i\bar{z} - 4i^2$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3 \Leftrightarrow |z| = 1$

β) Αφού $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$ άρα

$w = z + \frac{1}{z} = \frac{1}{\bar{z}} + \bar{z} = \bar{w} \Leftrightarrow w \in R$

γ) $|z-3-4i| = |z-(3+4i)|$

Από τριγωνική ανισότητα

$\big||z| - |3+4i|\big| \le |z-(3+4i)| \le |z| + |3+4i|$

$|1-5| \le |z-3-4i| \le 1+5 \Leftrightarrow 4 \le |z-3-4i| \le 6$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x} = y\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = ;$

Είναι $\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\cdot\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) = 1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η σχέση ισχύει για κάθε $x \in R$ άρα και για x=0, x=10

οπότε έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f^2(0) \le f(0)\ f(10) \\ f^2(10) \le f(10)\ f(0) \end{array}\right\} (+) \Rightarrow f^2(0) + f^2(10) - 2f(0)\ f(10) \le 0$$

$$\Rightarrow (f(0) - f(10))^2 \le 0$$

άρα $f(0) - f(10) = 0 \Leftrightarrow f(0) = f(10)$ οπότε είναι $0 \neq 10$ και

f(0) = f(10)

άρα η f δεν είναι 1-1οπότε και μη αντιστρέψιμη.

ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω ότι $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in R$.Τότε f(x) > x ή f(x) < x

- Αν f(x) > x είναι f(f(x)) > f(x) > x (Άτοπο)

- Αν f(x) < x τότε f(f(x)) < f(x) < x (Άτοπο)

άρα υπάρχει $x_o\in R$ ώστε $f(x_o) = x_o$

ΛΥΣΗ 6ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Για x=1 έχουμε f(f(1))=1 (1) και για x=f(1) έχουμε

$f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1)+1 \Leftrightarrow (1)\ \ f(1) = f^2(1) - f(1) + 1$

$\Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ-ΝΙΚΑΙΑ-ΓΑΛΑΤΣΙ