

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1^ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 4x + 6$ $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε η συνάρτηση f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

β) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης.

2^ο ΘΕΜΑ

Αν η κατανομή των μισθών των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι κανονική και το 15,85% βρίσκεται στο διάστημα $(550, 850)$ και $\bar{x} > 400$ να βρείτε:

- α) Αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
β) Πόσο το λιγότερο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές;
γ) Το πλήθος n των υπαλλήλων αν 68 υπάλληλοι παίρνουν μισθό από 1000 έως 1150 ευρώ.

3^ο ΘΕΜΑ

Το σημείο $A(2,2)$ βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να εκφράσετε το γ ως συνάρτηση του β
β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A είναι η ευθεία $y = x$, να βρείτε το β .
γ) Να βρεθεί η συνάρτηση f .

4^ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3e^x + \ln(x+1) + 3x - 3$

- α) Να βρεθεί το $f(0)$
β) Να βρεθεί το $f'(0)$
γ) Να υπολογισθεί το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot e^h + \ln(h+1) + 3h - 3}{h}$

δ) Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται επάνω από τον x' .

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\alpha) f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + 4$$

Στα $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα άρα:

$$f'(1) = 0 \text{ και } f'(-1) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) = 0 &\Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = -4 \\ f'(-1) = 0 &\Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta = -4 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow 6\alpha = -8 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{4}{3}$$

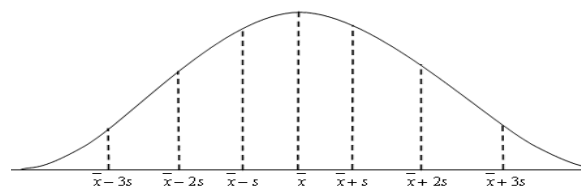
$$\text{και } \beta = \frac{-4 - 3\alpha}{2} = \frac{-4 + 4}{2} = 0$$

β) Για $\alpha = -4/3$ και $\beta = 0$ έχουμε ότι: $f'(x) = -4x^2 + 4$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$		\searrow	\nearrow	\searrow

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ



Από την καμπύλη της κανονικής κατανομής παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $[\bar{x} - 3s, \bar{x} - s]$ και $[\bar{x} + s, \bar{x} + 3s]$ περιέχουν το 15,85% των παρατηρήσεων. Οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

$$\begin{cases} \bar{x} - 3s = 550 \\ \bar{x} - s = 850 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} - 3s = 550 \\ -\bar{x} + s = -850 \end{cases} \Leftrightarrow -2s = -300$$

$$\Leftrightarrow s = 150 \text{ και } \bar{x} = 550 + 3s = 550 + 450 = 1000$$

2η περίπτωση:

$$\begin{cases} \bar{x} + s = 550 \\ \bar{x} + 3s = 850 \end{cases} \Leftrightarrow 2s = 300 \Leftrightarrow s = 150 \text{ και } \bar{x} = 400$$

Όμως πρέπει $\bar{x} > 400$ άρα απορρίπτεται αυτή η περίπτωση

Συνεπώς $S = 150$ και $\bar{x} = 1000$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{150}{1000} = 15\% > 10\%$$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Πρέπει

$$CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} \leq 0,1 \Leftrightarrow S \leq \bar{x} \cdot 0,1 + C \cdot 0,1 \Leftrightarrow$$

$$C \geq \frac{S - \bar{x} \cdot 0,1}{0,1} = \frac{150 - 100}{0,1} = 500$$

γ) Από 1000 έως 1150 Ευρώ έχω 68 υπαλλήλους. Δηλαδή το 34% των υπαλλήλων της εταιρείας είναι 68 υπάλληλοι. Οπότε

$$V = \frac{68 \cdot 100}{34} = 200 \text{ υπάλληλοι}$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Εφόσον το σημείο $A(2,2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f θα ισχύει:

$$f(2) = 2 \Leftrightarrow 2^2 + 2\beta + \gamma = 2 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -2 \Leftrightarrow \gamma = -2 - 2\beta$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της $y = x$ είναι 1 και εφόσον εφάπτεται με την γραφική παράσταση της f στο σημείο A , θα ισχύει: $f'(2) = 1$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 2x + \beta \text{ οπότε: } f'(2) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = -3$$

γ) Επειδή $\gamma = -2\beta - 2$ και $\beta = -3$ θα είναι $\gamma = -2 \cdot (-3) - 2$
 $\gamma = 4$ άρα $f(x) = x^2 - 3x + 4$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Πεδίο ορισμού f $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ άρα $x \in (-1, +\infty)$

$$f(0) = 3 \cdot e^0 + \ln 1 + 0 - 3 = 0$$

$$\beta) f'(x) = 3 \cdot e^x + \frac{1}{x+1} + 3, \quad x \in (-1, +\infty)$$

$$f'(0) = 3 + 1 + 3 = 7$$

$$\gamma) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot e^h + \ln(h+1) + 3h - 3}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot e^h + \ln(h+1) + 3h - 3}{h}$$

$$f'(0) = 7 \text{ άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot e^h + \ln(h+1) + 3h - 3}{h} = 7$$

δ) Οι τιμές του x για τις οποίες γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον x' είναι οι τιμές του $x \in (-1, +\infty)$ που επαληθεύουν την $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0)$ (1)

$$\text{Αλλά } f'(x) = 3e^x + \frac{1}{x+1} + 3 > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty)$$

άρα η (1) $\Leftrightarrow x > 0$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ-ΝΙΚΑΙΑ-ΓΑΛΑΤΣΙ