

ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

Β_α. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Β_β. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16.

Γ. α - Σ
β - Σ
γ - Λ
δ - Λ

Θέμα 2ο

α.

$$a + 4 + 5a + 8 + 4a + a - 1 + 2a = 50$$

$$13a = 39$$

$$a = 3$$

β.

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	50	77	

$$\bar{x} = \frac{0 + 23 + 24 + 6 + 24}{50} = \frac{77}{50}$$

γ. $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

δ. Έστω A το ενδεχόμενο ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

$$\text{Τότε } P(A) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Θέμα 3ο

α. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος. Τότε $N(\Omega) = x + (x + 4)^2$.

Αν A το ενδεχόμενο να επιλεγεί αγόρι τότε $N(A) = x$.

Άρα η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{x}{x + (x + 4)^2}$,

$x \in \mathbb{R}$ (Σύμφωνα με διευκρίνιση που δόθηκε κατά τη διάρκεια των εξετάσεων).

Επειδή όμως ο x εκφράζει τον αριθμό των αγοριών είναι $x \geq 0$. Οπότε

είναι και $0 \leq x \leq x + (x + 4)^2$ άρα $0 \leq \frac{x}{x + (x + 4)^2} \leq 1$.

$$\beta. P(A) = \frac{1}{19} \Leftrightarrow \frac{x}{x + (x + 4)^2} = \frac{1}{19} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \quad \eta \quad x = 8)$$

• Αν $x = 8$ τότε $N(\Omega) = 8 + (8 + 4)^2 = 152 > 100$.

Άρα η τιμή $x = 8$ απορρίπτεται.

• Αν $x = 2$ τότε $N(\Omega) = 2 + (2 + 4)^2 = 38 < 100$.

Άρα η τιμή $x = 2$ είναι δεκτή.

Αν K είναι το ενδεχόμενο να επιλεγεί κορίτσι, τότε

$$N(K) = (2 + 4)^2 = 36, \text{ οπότε } P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}$$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x + (x + 4)^2}$, $x \geq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με:

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 16}{[x + (x + 4)^2]^2}, \quad x \geq 0.$$

Από τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0	4	$+\infty$
f'	+	0	-
f	\nearrow	$\frac{1}{17}$	\searrow

προκύπτει ότι η f έχει για $x = 4$ μέγιστη τιμή $f(4) = \frac{1}{17}$.

Οι τιμές της $P(A)$ είναι ένα υποσύνολο από διακριτές τιμές του συνόλου τιμών της f .

Συγκεκριμένα η $P(A)$ παίρνει τιμές από το σύνολο $B = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots\}$, όπου $B \subseteq f(A)$.

Επειδή $f(x) \leq f(4)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ το σύνολο $f(A)$ έχει μέγιστη τιμή $f(4) = \frac{1}{17}$ που είναι μία από τις τιμές του συνόλου B .

Οπότε η μέγιστη τιμή που παίρνει η $P(A)$ είναι $\frac{1}{17}$ με αντίστοιχο αριθμό αγοριών 4.

Θέμα 4ο

α. Η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με $f'(x) = -4x + k + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον x' προκύπτει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Για $k = 2$ είναι $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$

οπότε $f(1) = 14$ και το σημείο $A(1, f(1))$ είναι το $A(1, 14)$.

Αφού τώρα η εφαπτομένη της C_f στο A είναι οριζόντια, η εξίσωσή της είναι $y = 14$.

β. $\bar{x} = f(1) = 14$

$f'(4) = -13$, άρα $s = -\frac{2(-13)}{13} = 2$

(i) Αφού η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 14$ και τυπική απόκλιση $s = 2$ έχουμε την ακόλουθη κατανομή:

Τιμές της X	8	10	12	14	16	18	20
Ποσοστό	0,15%	2,35%	13,50%	34%	34%	13,50%	2,35%

Αφού 3 παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 8 είναι

$$\frac{0,15}{100} \cdot n = 3 \Leftrightarrow n = 2000$$

Στο διάστημα (10, 16) όπως προκύπτει από το προηγούμενο διάγραμμα βρίσκονται 81,5% του συνόλου $n = 2000$ των παρατηρήσεων, δηλαδή

$$\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630 \text{ παρατηρήσεις.}$$

(ii) Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 0,14 > 0,10$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν προστεθεί ο $\alpha > 0$ σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις,

ο νέος συντελεστής μεταβλητής είναι $\frac{2}{14 + \alpha}$.

Θέλουμε $\frac{2}{14+a} \leq 0,10 \Leftrightarrow 2 \leq 1,4 + 0,1a \Leftrightarrow 0,1a \geq 0,6 \Leftrightarrow a \geq 6$.

Έτσι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράμετρος a είναι $a = 6$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Γ. ΧΑΣΙΑΚΗ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ