ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
2005

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	$x_i v_i$
0	11	11	0
1	14	25	14
2	17	42	34
3	5	47	15
4	3	50	12
Αθροίσματα	50		75

β) Η μέση τιμή είναι: $\overline{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=0}^{4} x_i v_i = \frac{75}{50} = 1{,}5$.

γ) Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα της $25^{ης}$ και της $26^{ης}$ παρατήρησης.
Έτσι $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

δ) Το εύρος είναι 4 − 0 = 4.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1) = 0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (\kappa x + \mu) = -\kappa + \mu$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (\kappa x + \mu) = \kappa + \mu$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + 2x + 5 + \ln x) = 1 + 2 + 5 = 8$.

ε) Τα όρια $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ υπάρχουν αν και μόνο αν
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, δηλαδή
$0 = -\kappa + \mu \Leftrightarrow \kappa - \mu = 0$ (1).

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ δηλαδή κ + μ = 8 (2).

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa-\mu=0\\ \kappa+\mu=8\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}2\kappa=8\\ \kappa-\mu=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\kappa=4\\ \mu=4\end{array}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Στον τύπο $f'(x) = x^2 - 2x$ θέτοντας $x = 0$, $x = 2$ παίρνουμε αντίστοιχα

$f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

$f'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$

β) $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
f'(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

Προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

γ) $f''(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

δ) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 0$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$.

ε) Η παράγουσα της $f'(x) = x^2 - 2x$ είναι $\frac{x^3}{3} - x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$.

Όμως $f(0) = 2005$. Άρα $\frac{0^3}{3} - 0^2 + c = 2005 \Leftrightarrow c = 2005$.

Έτσι προκύπτει $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2005$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Ο αριθμός των δελφινιών που υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$N(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 5 \cdot 0 + 1000 = 1000$.

β) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών είναι:

$N'(t) = (2t^3 - t^2 + 5t + 1000)' = 6t^2 - 2t + 5.$

γ) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών το δεύτερο έτος είναι:

$N'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 6 \cdot 4 - 4 + 5 = 24 - 4 + 5 = 25.$

δ) Μετά από δέκα (10) χρόνια θα υπάρχουν:

$$\begin{aligned} N(10) &= 2 \cdot 10^3 - 10^2 + 5 \cdot 10 + 1000 = \\ &= 2 \cdot 1000 - 100 + 50 + 1000 = \\ &= 2000 - 50 + 1000 = 2950 \text{ δελφίνια.} \end{aligned}$$