Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία: Παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$, σελ. 28 σχολικού βιβλίου.

Β. Ορισμός: σελ. 13 σχολικού βιβλίου.

Γ. Ορισμός: σελ. 87 σχολικού βιβλίου.

Δ. α-Λ, β-Λ, γ-Σ, δ-Σ, ε-Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ: ο καθηγητής είναι γυναίκα

Φ: ο καθηγητής είναι φιλόλογος

- Επειδή το 55% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες, έχουμε ότι: $P(Γ)=0,55$.
- Επειδή το 40% των καθηγητών του λυκείου είναι φιλόλογοι, έχουμε ότι: $P(Φ)=0,40$.
- Επειδή το 30% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες φιλόλογοι, έχουμε ότι: $P(Φ \cap Γ)=P(Γ \cap Φ)=0,30$.

Επομένως:

α. $P(Γ \cup Φ)=P(Γ)+P(Φ)-P(Γ \cap Φ)=0,55+0,40-0,30=0,65$.

β. $P(Γ \cap Φ')=P(Γ)-P(Γ \cap Φ)=0,55-0,30=0,25$.

γ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας και φιλόλογος είναι το $Γ' \cap Φ$, άρα:

$P(Γ' \cap Φ)=P(Φ)-P(Γ \cap Φ)=0,40-0,30=0,10$.

δ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας ή φιλόλογος είναι το $Γ' \cup Φ$, άρα:

$$\begin{aligned} P(Γ' \cup Φ) &= P(Γ')+P(Φ)-P(Γ' \cap Φ) = \\ &= 1-P(Γ)+P(Φ)-P(Φ)+P(Γ \cap Φ) = \\ &= 1-P(Γ)+P(Γ \cap Φ) = 1-0,55+0,30=0,75. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \{x-1 \neq 0 \text{ και } x+1 \neq 0\} \Leftrightarrow \{x \neq 1 \text{ και } x \neq -1\}$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re-\{-1,1\}$ και η σωστή απάντηση είναι η γ.

Β. Η συνάρτηση f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $\Re-\{-1,1\}$ με

$f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)' = \dfrac{x'(x^2-1)-x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ για κάθε $x \in \Re-\{-1,1\}$.

Γ. Είναι:

$$\lim_{x\to -1}[(x+1)\cdot f(x)] = \lim_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot\frac{x}{x^2-1}\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Δ. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,f(0)) με τον άξονα x΄x, τότε θα έχουμε

$$εφω = f'(0)$$

Όμως $f'(0) = -\frac{0^2+1}{(0^2-1)^2} = -1$ και επειδή $0 \leq ω < 180^o$, προκύπτει $ω = 135^o$.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α.

- Η μέση τιμή είναι:

  <u>Ομάδα Α</u>: $\overline{X_A} = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5$.

  <u>Ομάδα Β</u>: $\overline{X_B} = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8$.

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά και έχουμε:

  <u>Ομάδα Α</u>: 1, 3, 4, 5, 8, 9. Επομένως η διάμεσος είναι: $δ_A = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

  <u>Ομάδα Β</u>: 4, 5, 6, 7, 12, 14. Επομένως η διάμεσος είναι: $δ_B = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

β. Προκειμένου να συγκρίνουμε τις ομάδες ως προς την ομοιογένεια θα πρέπει να βρούμε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B. Έχουμε:

$S_A^2 = \frac{1}{6}\cdot[(1-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2] =$

$= \frac{1}{6}\cdot[(-4)^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2] = \frac{1}{6}(16 + 9 + 16 + 4 + 1) =$

$= \frac{1}{6}\cdot 46 = \frac{46}{6} = \frac{23}{3}$

οπότε:

$S_A = \sqrt{\frac{23}{3}}$

$S_B^2 = \frac{1}{6}\ [(7-8)^2 + (14-8)^2 + (6-8)^2 + (4-8)^2 + (12-8)^2 + (5-8)^2] =$

$= \frac{1}{6}\cdot[(-1)^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 4^2 + (-3)^2] = \frac{1}{6}\cdot[1 + 36 + 4 + 16 + 16 + 9] =$

$= \frac{1}{6}\,82 = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}$

οπότε $S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}$.

Επομένως,

$$CV_A = \frac{S_A}{\overline{x}_A} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \sqrt{\frac{23}{75}} \cong \sqrt{0{,}30}\,.$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\overline{x}_B} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \sqrt{\frac{41}{192}} \cong \sqrt{0{,}21}\,.$$

Άρα $CV_A > CV_B$ που σημαίνει ότι είναι περισσότερο ομοιογενής η Ομάδα Β.

γ.

- Αν y_i με i=1,2,3,4,5,6 είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Α μετά την αύξηση καθεμιάς κατά 20%, τότε έχουμε
  $$y_i = x_i + \frac{20x_i}{100} = x_i\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1{,}2x_i\,.$$
- Αν ω_i με i = 1,2,3,4,5,6 είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Β μετά την αύξηση καθεμιάς κατά 5€, τότε έχουμε
  $\omega_i = x_i + 5$.

Σύμφωνα τώρα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου έχουμε

$\overline{y} = 1{,}2 \cdot \overline{x_A} = 1{,}2 \cdot 5 = 6$€ και

$\overline{\omega} = \overline{x_B} + 5 = 8+5 = 13$€.

δ. Έχουμε

- $S_y = |1{,}2| \cdot S_A = 1{,}2\sqrt{\frac{23}{3}}$.
- $S_\omega = S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}$.

Επομένως οι συντελεστές μεταβολής των νέων ομάδων είναι αντίστοιχα:

$$CV_{A'} = \frac{S_y}{\overline{y}} = \frac{1{,}2 \cdot S_A}{1{,}2 \cdot \overline{x}_A} = CV_A \cong \sqrt{0{,}30}\,.$$

$$CV_{B'} = \frac{S_\omega}{\overline{\omega}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{13} = \sqrt{\frac{41}{507}} \cong \sqrt{0{,}08}\,.$$

Συνεπώς $CV_{A'} > CV_{B'}$, που σημαίνει ότι η ομάδα Β΄ είναι περισσότερο ομοιογενής από την ομάδα Α΄.