

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22
A3. Σ,Λ,Σ,Λ,Σ
A4. (2) A5. (1)

ΘΕΜΑ Β

B1.

- i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -1+2 \leq \eta\mu x+2 \leq 1+2 \Rightarrow 1 \leq \eta\mu x \leq 3 \Rightarrow \eta\mu x \neq 0$. Επομένως $D_f = \mathbb{R}$.
- ii. $g'(x) = \frac{(\eta\mu x)'(\eta\mu x+2) - (\eta\mu x)(\eta\mu x+2)'}{(\eta\mu x+2)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+2) - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+2)^2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+2)^2}$

B2.

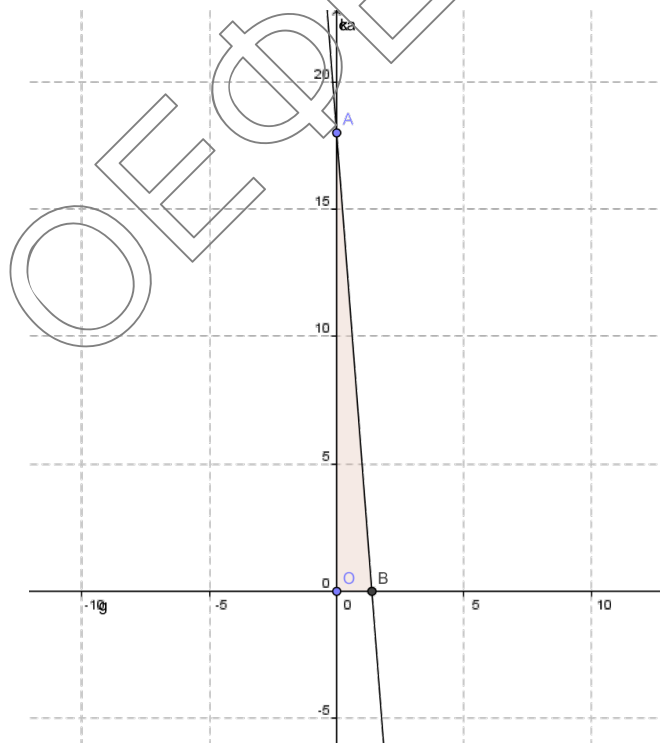
- i. Έχω $f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$ και f παραγωγίσιμη άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$
- ii. $f'(x_0) = -13 \Rightarrow -3x_0^2 - 1 = -13 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = 2$ ή $x_0 = -2$
Απορρίπτεται διότι το -2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$y = f'(2)x + b$, το σημείο $K(2, f(2)) = (2, -8)$ ανήκει στην εφαπτομένη άρα την επαληθεύει: $-8 = 13 \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = 18$ επομένως η εξίσωση είναι:
 $y = -13x + 18$

iii. Τομή με $y'y$ ($x = 0$): $y = -13 \cdot 0 + 18 = 18$ άρα έχω το σημείο $A(0, 18)$

Τομή με $x'x$ ($y = 0$): $0 = -13x + 18 \Rightarrow x = \frac{18}{13}$ άρα έχω το σημείο $B(\frac{18}{13}, 0)$

Θεωρούμε για τις ανάγκες σχεδίασης ως $k(x) = -13x + 18$



$$\text{Επομένως } (AOB) = \frac{(AO)(OB)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \frac{18}{13} = 9 \frac{18}{13} = \frac{162}{13}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι:

- $(\eta\mu^2x + \sigma\nu\nu^2x)^{2019} = 1^{2019} = 1$
- $2\eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\nu\nu\frac{\pi}{2} = 2 + 0 = 2$

Επομένως: $P(x) + \frac{1}{2}P''(x) = x^2 + 2$ σχέση (1)

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma \\ P'(x) = 2ax \\ P''(x) = 2\alpha \end{cases} \text{ επομένως η (1) γίνεται:}$$

$$ax^2 + \beta x + \gamma + \frac{1}{2}2\alpha = x^2 + 2 \Rightarrow ax^2 + \beta x + \gamma + \alpha = x^2 + 0x + 2$$

$$\text{Ως εκ τούτου έχουμε: } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma + \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\text{Συνεπώς: } \begin{cases} P(x) = x^2 + 1 \\ P'(x) = 2x \\ P''(x) = 2 \end{cases}$$

Γ2. Έστω $M(x_0, P(x_0))$ σημείο επαφής της $P(x)$ και μιας εφαπτομένης.

$$\text{Εξίσωση εφαπτομένης } (\varepsilon): y = P'(x_0)x + \beta \Rightarrow y = 2x_0x + \beta \text{ σχέση (2)}$$

Αφού οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων, η σχέση (2) για $x=y=0$ γίνεται: $0 = 2x_0 \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = 0$ άρα τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης για $\beta=0$ γίνεται: $y = 2x_0x$ σχέση (3)

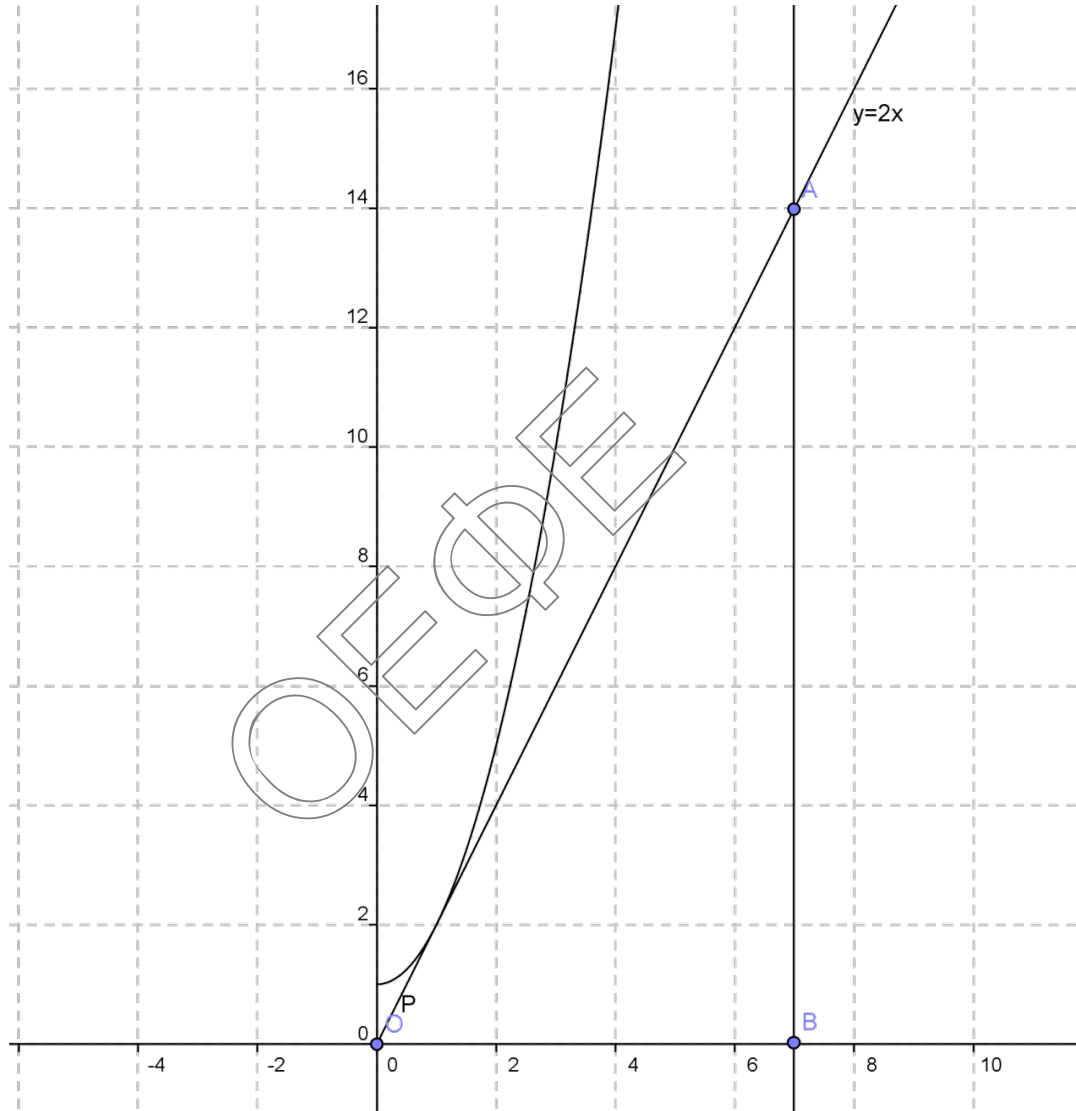
Επιπλέον, το σημείο επαφής θα ανήκει και στην (ε) και στην $P(x)$, άρα θα επαληθεύει και τις δύο. Ως εκ τούτου η (3) γίνεται

$$P(x_0) = 2x_0x_0 \Rightarrow x_0^2 + 1 = 2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ ή } -1$$

$$\text{Για } x_0 = 1 \text{ η (3) γίνεται } y = 2x$$

$$\text{Για } x_0 = -1 \text{ η (3) γίνεται } y = -2x$$

Γ3. Έστω $A(x, 2x)$ τυχαίο σημείο της $(ε)$ και $B(x, 0)$ η προβολή του στον άξονα $x'x$



Γ4. Το τρίγωνο ABO είναι ορθογώνιο, επομένως θα εφαρμόσω το πυθαγόρειο θεώρημα για την εύρεση της πλευράς AO .

Έχουμε $BO = x, AB = 2x$, επομένως

$$AO^2 = BO^2 + AB^2 \Rightarrow AO = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x^2} = \sqrt{5}x$$

Άρα η περίμετρος: $\Pi(x) = BO + AB + AO = x + 2x + \sqrt{5}x = (3 + \sqrt{5})x$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου είναι: $\Pi'(x) = 3 + \sqrt{5}$ που είναι σταθερός αριθμός.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής (ε): $y=\lambda x+\beta$, $\lambda<0$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, άρα $2=\lambda+\beta \Rightarrow \beta = 2 - \lambda$

Συνεπώς η ευθεία (ε) έχει εξίσωση (ε): $y=\lambda x+2-\lambda$, με $\lambda<0$. Η ευθεία τέμνει τους άξονες Oy και Ox στα σημεία $K(0,2-\lambda)$ και $\Lambda(\frac{\lambda-2}{\lambda}, 0)$ αντίστοιχα.

Το εμβαδόν του τριγώνου $K\Lambda O$ που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους θετικούς ημιάξονες δίνεται από τη σχέση : $E(\lambda)=\frac{1}{2}\frac{\lambda-2}{\lambda}(2-\lambda)$, με $\lambda<0$.

$E(\lambda)=\frac{-(\lambda-2)^2}{2\lambda}$, $\lambda<0$ γίνεται ελάχιστο όταν $\lambda=-2$, καθώς $E'(\lambda) = \frac{4-\lambda^2}{2\lambda^2}$ και

$E'(\lambda) = 0 \Rightarrow 4 - \lambda^2 = 0$ άρα $\lambda=2$ ή $\lambda=-2$ (Το $\lambda=2$ απορρίπτεται διότι $\lambda<0$)

λ	$-\infty$	-2	2
$E'(\lambda)$	-	+	-
$E(\lambda)$	↓	↑	↓

Για $\lambda=-2$ η ζητούμενη ευθεία είναι $y=-2x+4$

Δ2. Έχουμε $f(x)=\frac{-2x^2+2x+4}{x+1}$

i. Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα $D=(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

ii. Έχουμε $f(x) = \frac{-2x^2+2x+4}{x+1} = \frac{-2(x^2-x-2)}{x+1} = \frac{-2(x+1)(x-2)}{x+1} = -2x + 4$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $y=-2x+4$ εκτός του σημείου $B(-1,6)$.

Δ3. Έχουμε $f(x)=-2x+4$ άρα $f'(x)=-2<0$ για κάθε $x \in D=(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ και στο $(-1,+\infty)$.

Δ4.

i. Έχουμε $g(x) = \sqrt{f(x)}$ επομένως πρέπει

$$\begin{cases} -2x + 4 \geq 0 & \text{και} \\ x \neq -1 & \text{διότι } D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Διότι: $-2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 2$ Άρα έχουμε $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 2]$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)+x}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2+x}{\sqrt{-2x+4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{-2x+4}}{\sqrt{-2x+4}^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{-2x+4}}{-2x+4} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{-2x+4}}{-2(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{-2x+4}}{-2} = 0 \end{aligned}$$

Ο.Ε.Φ.Ε.